1 אוטומט סופי דטרמינסטי – DFA
ואוטומט סופי לא-דטרמינסטי – NFA

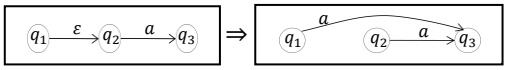
$DFA\backslash NFA$: $A = \left(\underset{\text{קב' מצבים}}{Q}, \underset{\text{קב' א"ב קלט}}{\Sigma}, \underset{\text{פונ' מעבר}}{\delta}, \underset{\text{מצב התחלה}}{q_0}, \underset{\text{קב' מצבים מקבלים}}{F}\right)$

פונ' המעברים של DFA: $\delta: Q \times \Sigma \to Q$.

פונ' המעברים של NFA: $\delta: Q \times \Sigma \cup \{\varepsilon\} \to P(Q)$.

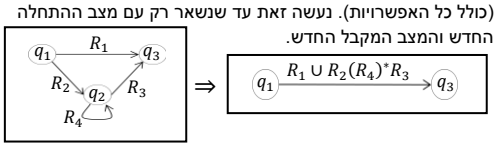
חישוב מקבל: רצף $w = w_1 \dots w_m$, $w_i \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ וקב' מצבים $p_0, \dots, p_m$ שמקיימים:
(1) $p_0 = q_0$. **(2)** $p_{j+1} \in \delta(p_j, w_{j+1})$. **(3)** $p_m \in F$.
נגיד שאוטומט N מקבל מילה w אם קיים חישוב מקבל עבור w ב-N.

מעבר מ-NFA ל-DFA - (1) ביטול מעברי ε:



(2) דטרמינציה: רושמים את כל השילובים האפשריים של המצבים מה-NFA (קב' החזקה שלהם).
מצב ההתחלה ב-DFA יהיה $\{q_0\}$. כעת בודקים מה כל האפשרויות למעבר מקב' המצבים שהיינו, וזו קב' המצבים אליה עוברים.
המצבים מקבלים ב-DFA יהיו כל הקב' שמכילות מצב מקבל ב-NFA.
מצב מוות – כל מה שאין ממנו חץ ב-NFA עובר לקב' $\emptyset$ ב-DFA.
(*) אם ל-NFA יש n מצבים אז ל-DFA יש 2^n מצבים.

$GNFA$ - במקום אות $a \in \Sigma$ על מעבר, יש על כל מעבר ביטוי רגולרי R.
הפיכת DFA ל-$GNFA$ (בניית ביטוי רגולרי) – (1) מוסיפים מצב התחלה חדש ומצב מקבל חדש. **(2)** ממצב ההתחלה החדש יהיה מעבר ε למצב ההתחלה הקודם. **(3)** ביטול כל המצבים המקבלים הקודמים וחיבורם עם מעבר ε למצב המקבל החדש. **(4)** בכל פעם בוחרים מצב ומבטלים אותו, כך שדואגים לקשר את המצבים לפניו למצבים שאחריו (כולל כל האפשרויות). נעשה זאת עד שנשאר רק עם מצב ההתחלה החדש והמצב המקבל החדש.



למת הניפוח: L **שפה רגולרית** $\Leftarrow$ קיים קבוע $l > 0$ כך שלכל $s \in L$:
אם $|s| \geq l$ אז קיימת חלוקה $s = xyz$ שבה מתקיים:
(1) $|y| > 0$. **(2)** $|xy| \leq l$. **(3)** $\forall_{i \geq 0}. xy^iz \in L$.

כדי להוכיח ש-L **לא רגולרית** נוכיח: לכל $l > 0$ קיים $s \in L$ כך ש- $|s| \geq l$ ולכל חלוקה $s = xyz$ שבה $|y| > 0$ ו- $|xy| \leq l$, קיים $i \geq 0$ כך ש- $xy^iz \notin L$.

הוכחה בדרך השלילה - צ"ל ש- $L = \{0^m1^n \mid m \neq n\}$ לא רגולרית:
נניח בשלילה ש-L רגולרית $\Leftarrow \bar{L}$ גם רגולרית. $L(0^*1^*)$ בוודאי רגולרית
$\Leftarrow$ גם $\bar{L} \cap L(0^*1^*) = \{0^n1^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ רגולרית, וקיבלנו סתירה.

משפט מיהיל-נרוד – מחלקת שקילות: $[x] = [y] \Leftrightarrow x \sim_L y$.
יחס השקילות $\sim_L$ מוגדר כך: $x \sim_L y \Leftrightarrow \forall_{z \in \Sigma^*}. (xz \in L \Leftrightarrow yz \in L)$.
המשפט: L רגולרית $\Leftrightarrow$ מס' מחלקות השקילות של $\sim_L$ הוא סופי.
(*) אם $x \sim_L y \Rightarrow \forall_{z \in \Sigma^*}. xz \sim_L yz$.
(*) מס' מחלקות השקילות $\geq$ ממס' המצבים ב-DFA.
(*) מס' מחלקות השקילות = למס' המצבים ב-DFA המינימלי.
דוגמא: $L = L((0 \cup 1)^*11)$, המחלקות שקילות: **(1)** $[11]_{\sim_L} = L$.
(2) $[01]_{\sim_L} = L((0 \cup 1)^*01) \cup \{1\}$.
(3) $[10]_{\sim_L} = L((0 \cup 1)^*0) \cup \{\varepsilon\}$.
דוגמא: $L = L((01 \cup 10)^*)$, המחלקות שקילות: **(1)** $[01,10]_{\sim_L} = L$.
(2) $[0]_{\sim_L} = L((01 \cup 10)^*0)$. **(3)** $[1]_{\sim_L} = L((01 \cup 10)^*1)$.
(4) $[00,11]_{\sim_L} = L((00 \cup 11)^*\Sigma^*)$.

ביטוי רגולרי: $a \in \Sigma$, ε, $\emptyset$ הם ביטויים רגולרים. ביטויים רגולרים סגורים לפעולות: איחוד, שירשור, חזקה, ו- $Kleene\ Star$.
(*) $Kleene\ Star$ – $\{a,b\}^* = \{\varepsilon, a, b, aa, bb, ab, ba, \dots\}$.
(*) לכל ביטוי רגולרי ניתן לבנות אוטומט סופי. ההפך גם נכון.

שפות רגולריות סגורות לפעולת: חיתוך, איחוד, שירשור, משלים, היפוך ($Reverse$), $Kleene\ Star$ *, $Rot(L) = \{yx | xy \in L\}$, $DropChar(L) = \{xy | x, y \in \Sigma^*, a \in \Sigma, xay \in L\}$, הפרש, $\max(L) = \{w \in L | \forall_{u \in \Sigma^*}. wu \in L\}$, $Inv(L) = \{xyz | xy^Rz \in L\}$, $Half(L) = \{x | \exists_y. (|y| = |x|, xy \in L)\}$.
(*) איחוד אינסופי של שפות רגולריות לא בהכרח ב-R.

סיכום שיטות הוכחה:
רגולריות: **(1)** בניית DFA, NFA. **(2)** בניית ביטוי רגולרי. **(3)** מס' המחלקות סופי. **(4)** השפה מתקבלת משפות רגולריות ע"י פעולות משמרות רגולריות.
אי-רגולריות: **(1)** סתירה ללמת הניפוח. **(2)** מס' המחלקות אינסופי. **(3)** מפעולות משמרות רגולריות מתקבלת שפה לא רגולרית.

שאלות לגבי NFA: (N, N_1, N_2 הם NFA)
(1) האם $s \in L(N)$? נבנה DFA מ-N ונריץ אותו על s.
(2) האם $L(N) = \emptyset$? בודקים האם יש מסלול מ- q_0 למצב מקבל.
(3) האם $L(N) = \Sigma^*$? בודקים ש: $\overline{L(N)} = \emptyset$.
(4) האם $L(N_1) \subseteq L(N_2)$? בודקים ש : $L(N_1) \cap \overline{L(N_2)} = \emptyset$.
(5) האם $L(N_1) = L(N_2)$? בודקים הכלה לשני הכיוונים.
(*) מחלקת השפות של NFA ו-DFA זהות - השפות הרגולריות.
(*) כל שפה סופית היא רגולרית.

סגירות רגולריות: איחוד – נוסיף מצב התחלה חדש עם מעברי ε למצבי ההתחלה הקודמים. שירשור – חיבור המצבים המקבלים של ה-1 עם מצב התחלה של ה-2 במעבר ε. משלים – ב-DFA נהפוך את כל המצבים המקבלים ללא מקבלים ולהפך. חיתוך – ע"פ דה-מורגן $A_1 \cap A_2 = \overline{\overline{A_1} \cup \overline{A_2}}$. $Kleene\ Star$ * - מוסיפים ממצבי הסיום מעבר אפסילון למצב התחלה חדש העובר למצב ההתחלה הישן באמצעות אפסילון. מצב ההתחלה החדש הוא מצב מקבל. היפוך ($Reverse$) – (1) נוסיף מצב התחלה חדש שממנו יהיה מעבר ε לכל המצבים המקבלים הקודמים (אם יש רק מצב מקבל אחד אז הוא יהיה המצב ההתחלה החדש). (2) המצב המקבל יהיה המצב ההתחלה הקודם. (3) הפיכת כל שאר המעברים. $Rot(L)$ – לכל מצב q ב-DFA נבנה NFA N_q: (1) ניצור 2 עותקים של ה-DFA $N_{q1}.N_{q2}$. (2) מצב ההתחלה יהיה המצב q ב-N_{q1}. (3) מכל מצב מקבל ב-N_{q1} יהיה מעבר ε למצב q_0 ב-N_{q2}. (4) המצב המקבל היחיד יהיה המצב q ב-N_{q2}. כעת נאחד את כל ה-N_q שקיבלנו, וזה יהיה האוטומט הרצוי.

שאלות לגבי DFA: (A הוא DFA, $|Q| = n$, R הוא ביטוי רגולרי)
(1) האם $|L(A)| = \infty$? $\Leftrightarrow$ קיימת $w \in L(A)$ כך ש- $n < |w| \leq 2n$.
(2) האם $|L(A)| = x \in \mathbb{N}$? אם $|L(A)| = \infty$ אז נחזיר לא. אחרת, נריץ את כל המילים $w \in L(\Sigma^*)$ באורך $|w| \leq n$ ונבדוק אם ה-DFA קיבל בדיוק x מילים כאלה, אם כן נחזיר כן, ואחרת נחזיר לא.
(3) מציאת ה-DFA המינימלי - נמצא את ה-DFA המינימלי (הכי קצת מצבים) שמקבל את $L(R)$: נבנה NFA שמקבל את $L(R)$, נמיר אותו ל-DFA ונסמנו ב-A. נבנה את כל ה-DFA שקטנים מ-A (מס' סופי), ולכל A_i נבדוק האם $L(A_i) = L(A)$ ונקח את ה-A_i הכי קטן מביניהם.

2 דקדוק חסר הקשר – CFG, ואוטומט מחסנית - PDA

CFG: $G = \left(\underset{\text{קב' משתנים}}{V}, \underset{\text{קב' טרמינלים}}{\Sigma}, \underset{\text{אוסף חוקים}}{R}, \underset{S \in V}{S}\right)$

גזירה: מתחילים במשתנה S ובכל שלב בוחרים משתנה כלשהו A וכלל גזירה $A \to a$ ומחליפים את A ב-a. מסיימים כשאין יותר משתנים.
שפה ח"ה: $L(G) = \{w | S \Rightarrow w\}$ (ניתן לגזור ב-G את w מ-S).

למת הניפוח: L **שפה ח"ה** $\Leftarrow$ קיים קבוע $l > 0$ כך שלכל $s \in L$:
אם $|s| \geq l$ אז קיימת חלוקה $s = uvxyz$ שבה מתקיים:
(1) $|vy| > 0$. **(2)** $|vxy| \leq l$. **(3)** $\forall_{i \geq 0}. uv^ixy^iz \in L$.

כדי להוכיח ש-L **לא ח"ה** נוכיח: לכל $l > 0$ קיים $s \in L$ כך ש- $|s| \geq l$ ולכל חלוקה $s = uvxyz$ שבה $|vy| > 0$ ו- $|vxy| \leq l$, קיים $i \geq 0$ כך ש- $uv^ixy^iz \notin L$.

טענה: כל דיקדוק ח"ה ניתן להפוך לצורה הנורמלית של חומסקי.
הצורה הנורמלית של חומסקי: (1) רק S (משתנה התחלה) יכול לעבור ל-ε. (2) S לא יופיע בצד ימין של גזירה. (3) מעבר לטרמינלים יתבצע לבד (לא בצמוד למשתנה). (4) כל גזירה תבוצע ל-2 משתנים (בדיוק) או טרמינל בודד אחד.
טענה: אם G הוא דיקדוק ח"ה בצורה הנורמלית של חומסקי אז עבור כל $w \in L(G)$ ($|w| = n$) קיימת גזירה של $2n - 1$ צעדים שמיצרת את w.
מעבר לצורת חומסקי: (1) הוספת מצב חדש S_0 שמפנה ל-S המקורי. (2) ביטול כל חוקי $A \to \varepsilon$ (כל חוק כזה חוזרים אחורה למי שמפנה ל-A ומוסיפים גזירה ללא A). (3) ביטול כל גזירות יחידות $A \to B$ (מבטלים את ההפניה ל-B, ובמקומה רושמים ב-A את כל האפשרויות של B). (4) ביטול גזירות של 3 ומעלה. כל גזירה $A \to BCD$ הופכים לכללים חדשים: $A \to BA_1$ ו- $A_1 \to CD$. כמו כן, אם יש $A \to aB$, אז נהפוך ל- $A \to A_1B$ ו- $A_1 \to a$. **דוגמא:** 0) התחלה:

```
S -> ASA | aB
A -> B | S
B -> b | ε
```

1) מוסיפים מצב התחלה חדש:

```
S0 -> S
S -> ASA | aB
A -> B | S
B -> b | ε
```

2) מבטלים כלל $B \to \varepsilon$:

```
S0 -> S
S -> ASA | aB | a
A -> B | S | ε
B -> b | ε
```

3) מבטלים כלל $A \to \varepsilon$:

```
S0 -> S
S -> ASA | aB | a | AS | SA | S
A -> B | S | ε
B -> b
```

4) ביטול חוק $S \to S$ ולאחר מכן ביטול חוק יחידה $S_0 \to S$:

```
S0 -> ~~S~~ | ASA | aB | a | AS | SA
S -> ASA | aB | a | AS | SA | ~~S~~
A -> B | S
B -> b
```

5) ביטול חוק יחידה $A \to B$:

```
S0 -> ASA | aB | a | AS | SA
S -> ASA | aB | a | AS | SA
A -> ~~B~~ | S | b
B -> b
```

6) ביטול חוק יחידה $A \to S$:

```
S0 -> ASA | aB | a | AS | SA
S -> ASA | aB | a | AS | SA
A -> ~~S~~ | b | ASA | aB | a | AS | SA
B -> b
```

7) לסיום – שינוי חוקים ארוכים:

```
S0 -> AA1 | A2B | a | AS | SA
S -> AA1 | A2B | a | AS | SA
A -> b | AA1 | A2B | a | AS | SA
B -> b
A1 -> SA
A2 -> a
```

שפות ח"ה סגורות לפעולת: איחוד ($S \to S_A \mid S_B$), שירשור ($S \to S_A \mid S_B$), $Kleene\ Star$ * ($S \to SS \mid \varepsilon$), חיתוך עם שפה רגולרית, היפוך ($Reverse$), $pref(L) = \{w \mid \exists_u. wu \in L\}$.
שפות ח"ה אינן סגורות תחת חיתוך ומשלים, וגם לא ל-$Inv(L)$.

שאלות לגבי CFG: G, H) הם CFG, w היא מחרוזת, $|w| = n$)
(1) האם $w \in L(G)$? נמיר את G לצורה הנורמלית של חומסקי, נבדוק את כל הגזירות בגודל $2n - 1$ צעדים ואם אחת מהן מייצרת את w אז התשובה היא כן, ואחרת לא.
(2) האם $L(G) = \emptyset$? (1) נסמן את כל הטרמינלים. (2) נסמן כל משתנה אשר כל הטרמינלים שלו מסומנים. (3) נסמן כל משתנה A כאשר $A \to A_1 \dots A_n$ וכל A_i כבר סומן. (4) אם משתנה ההתחלה סומן אז התשובה היא כן, ואחרת לא.
(3) האם $|L(G)| = \infty$? $\Leftrightarrow$ קיימת $w \in L(G)$ כך ש- $|V| = m$ בצורה הנורמלית של חומסקי ו- $2^m < |w| \leq 2^{m+1}$).
(4) האם $|L(G)| = x \in \mathbb{N}$? אם $|L(G)| = \infty$ אז נחזיר לא. אחרת, נריץ את כל המילים $w \in L(\Sigma^*)$ באורך $|w| \leq 2^m$ ונבדוק אם הדיקדוק G מקבל בדיוק x מילים כאלה, אם כן נחזיר כן, ואחרת נחזיר לא.
(5) האם $L(G) = \Sigma^*$? לא ניתן לדעת (כי אין סגירות תחת המשלים).

סיכום שיטות הוכחה:
שפה ח"ה: **(1)** מראים דקדוק ח"ה לשפה. **(2)** השפה רגולרית. **(3)** השפה מתקבלת משפות ח"ה ע"י פעולות משמרות ח"ה.
שפה אינה ח"ה: **(1)** לא מתקיימת למת הניפוח. **(2)** מפעולות משמרות ח"ה מתקבלת שפה לא ח"ה.

הפיכת DFA ל-CFG – לכל מצב q_i יהיה את המשתנה A_i.
(1) משתנה ההתחלה יהיה A_0. **(2)** עבור $q_j = \delta(q_i, a)$ נוסיף את הכלל $A_i \to aA_j$. **(3)** לכל מצב מקבל q_f נוסיף את הכלל $A_f \to \varepsilon$.
(*) כל שפה רגולרית היא שפה ח"ה.
(*) אם $|\Sigma| = 1$ אז: L רגולרית $\Leftrightarrow$ L ח"ה.

(*) פישוט דיקדוקים: (1) סילוק משתנים שלא ניתן להגיע מהם למילה טרמינלית. (2) סילוק טרמינלים שלא ניתן להגיע אליהם ממשתנה ההתחלה.

PDA: $\left(\underset{\text{קב' מצבים מקבלים}}{F}, \underset{\text{מצב התחלה}}{q_0}, \underset{\text{פונ' מעבר}}{\delta}, \underset{\text{א"ב מחסנית}}{\Gamma}, \underset{\text{א"ב קלט}}{\Sigma}, \underset{\text{קב' מצבים}}{Q}\right)$

פונ' המעבר: $\delta: Q \times \Sigma \cup \{\varepsilon, \$\} \times \Gamma \cup \{\varepsilon\} \to P(Q \times \Gamma \cup \{\varepsilon\})$.
(*) $\delta(q, a, b) = (q', c)$ – קרא a מהקלט, תוציא b מהמחסנית, ודחוף c למחסנית (שקול למעבר $a, b \to c$ בין q ל-q').
(*) יש 2 אפשרויות שקולות לקבלה: (1) כשמגיעים למצב מקבל. (2) כשהמחסנית ריקה.
(*) ל- PDA לא-דטרמיניסטי יש יותר "כוח" מ-PDA דטרמינסטי.
(*) לכל שפה ח"ה ניתן לבנות PDA לא-דטרמיניסטי (יש שפות ח"ה שיש להן PDA לא-דטרמיניסטי אבל אין להן PDA דטרמיניסטי).
(*) אוטומט מחסנית עם 2 מחסניות שקול למ"ט.

3 שפות ח"ה ושפות לא ח"ה

שפות ח"ה:
1) $\{a^nb^n | n \geq 0\}$ $(S \to aSb \mid \varepsilon)$
2) $\{a^nb^m | n \neq m\}$
3) $L_3 = \{ww^R | w \in \Sigma^*\}$ $(S \to aSa \mid \dots \mid bSb \mid a \mid \dots \mid b \mid \varepsilon)$
(אין PDA דטרמינסטי ל- L_3, יש רק PDA לא-דטרמינסטי)
4) $L_4 = \{a^ib^jc^k | i, j, k \geq 0, and\ (j = i\ or\ k = i)\}$
(אין PDA דטרמינסטי ל- L_4, יש רק PDA לא-דטרמינסטי)
(L_4) זה איחוד של 2 שפות ח"ה: (1) $\{a^ib^ic^k\}$. (2) $\{a^ib^kc^i\}$.
5) $\{a^nb^mc^{n+m} | n, m \geq 0\}$ $(S \to A|\varepsilon,\ A \to aAc|B,\ B \to bBc|\varepsilon)$
6) $L_6 = \{a^kb^tc^nd^m | k, t, n, m \geq 0, and\ (k = t\ XOR\ n = m)\}$
(L_6) זה איחוד של: (1) שירשור של $\{a^tb^t\}$ ושל $\{c^nd^m | n \neq m\}$.
(2) שירשור של $\{a^tb^k | t \neq k\}$ ושל $\{c^nd^n\}$.

שפות לא ח"ה:
1) $\{a^nb^nc^n | n \geq 0\}$. $s = a^lb^lc^l$.
2) $\{a^ib^jc^k | 0 \leq i \leq j \leq k\}$. $s = a^lb^lc^l$.
3) $\{ww | w \in \Sigma^*\}$. $s = 0^l1^l0^l1^l$.
4) $\{x\#y | x, y \in \{0,1\}^*, x\ is\ a\ substring\ of\ y\}$. $s = 0^l1^l\#0^l1^l$.
5) $Inv(L) = \{xyz | xy^Rz \in L\}$.
(אם $L = \{a^nb^nc^md^m\} \Rightarrow Inv(L) \cap L(a^*c^*b^*d^*) = \{a^nc^mb^nd^m\}$)

4 שפות רגולריות ושפות לא רגולריות

שפות רגולריות:
1) $\{xy^RzyX^R | |x|, |z|, |y| \geq 1\} = \{wzw^R | |z| \geq 1, |w| \geq 2\} = \{wzw^R | |z| \geq 1, |w| = 2\}$
(ה = האחרון זה כי גם ככה z יכול להיות כל דבר, כולל $z = \hat{w}\hat{z}\hat{w}^R$)
2) $\{xy | (x \in L)\ XOR\ (y \in L)\} = L\bar{L} \cup \bar{L}L$

שפות לא רגולריות:
1) $L = \{a^nb^m | n \neq m\}$. נבחר $s = a^lb^{l!+l}$. בכל חלוקה $y = a^k$ ($1 \leq k \leq l$) ועבור $i = \frac{l!}{k} + 1$ מתקיים ש- $\#_a = \#_b$ (כלומר $\notin L$).
2) $L = \{1^{n^3} | n \geq 0\}$. נבחר $s = 1^{l^3}$. בכל חלוקה $y = 1^k$ כאשר $1 \leq k \leq l$. עבור $i = k + 1$: $xy^iz = 1^{l^3+k^2}$. ומתקיים: $1^{l^3+k^2} \notin L \Leftarrow l^3 < l^3 + k^2 \leq l^3 + l^2 = l^2(l+1) < (l+1)^3$.
3) $L = \{w \in \{0,1\}^* | \#_1(w) = \#_0(w)\}$. הוכחה ע"י משפט מיהיל-נרוד.
4) $L = L(0(0 \cup 1)^*)$. נבחר $Rot_{0.5}(L) = \{xy | |x| = |y|, yx \in L\}$. $L' = Rot_{0.5}(L) = \{w \in \{0,1\}^* | |w| = 2n,\ w[n+1] = 0\}$ - ואז התו ה-$n + 1$ ב-w חייב להיות 0. נוכיח ע"י למת הניפוח, $s = 1^l0^l$.

5 מכונת טיורינג (מ"ט) – *Turing Machine*

TM: $M = (\underset{\text{קב' מצבים}}{Q}, \underset{\text{א"ב קלט}}{\Sigma}, \underset{\text{פו' מעבר, א"ב סרט}}{\Gamma}, \underset{\text{מצב התחלה}}{q_0}, \underset{\text{מצב מקבל}}{q_a}, \underset{\text{מצב דחייה}}{q_r})$

פונ' המעבר: $\delta: Q \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{L, R\}$.

קונפיגורציה של מ"ט: מחרוזת $xqyz$. x מכיל את הקלט עד המקום בו נמצא הראש, q זה המצב הנוכחי, ראש הסרט נמצא על התו y ו-z מכיל את סרט הקלט מהתו שאחרי ראש הסרט ועד הסוף.

היסטוריה חישובית מקבלת: מ"ט M מקבלת את w $\Leftrightarrow$ קיימת מחרוזת $\#C_k\# \dots \#C_1\#$ כך ש: (1) C_i קונפ' חוקית. (2) C_1 קונפ' התחלתית של w. (3) כל C_i מובילה ל- C_{i+1}. (4) C_k קונפ' מקבלת.

(*) אם $\delta(q,b) = (p,c,L)$ אז קונפ' $uaqbv$ מובילה לקונפ' $upacv$.

(*) אם $\delta(q,b) = (p,c,R)$ אז קונפ' $uaqbv$ מובילה לקונפ' $uacpv$.

(*) אם $\delta(q,b) = (p,c,L)$ אז קונפ' qbv מובילה לקונפ' pcv.

(*) בדיקה האם קלט הוא היסטוריה חישובית מקבלת יכולה להיעשות ללא צורך במקום נוסף על הסרט.

גרסאות שקולות למ"ט: (1) התחלת הסרט מסומנת ב-$. (2) ניתן להשאר במקום אחרי כתיבה. (3) מס' סרטים. (4) סרט דו כיווני. (5) גרסה לא דטרמיניסטית.

מ"ט אוניברסלית: מ"ט אוניברסלית U פועלת על הקלט $\langle M, w\rangle$ כך: (1) בודקת ש-$\langle M, w\rangle$ הוא קידוד חוקי למ"ט M ומחרוזת $w \in L(\Sigma^*)$. (2) מסמלצת את מ"ט M על הקלט w. (3) אם M מקבלת/דוחה/לא עוצרת אז U מקבלת/דוחה/לא עוצרת בהתאם.

(*) U משתמשת ב-3 סרטים: (1) מדמה את הסרט של M. (2) הקידוד של M. (3) שומר את המצב ($q \in Q$) שבו M נמצאת.

מ"ט חישובית טוטלית: $f: \Sigma^* \to \Sigma^* \cup \{space\}$. על קלט w, המכונה עוצרת כאשר על הסרט כתוב $f(w)$.

מ"ט חישובית חלקית: אותו רעיון פרט לכך שהמכונה עוצרת רק אם $f(w)$ מוגדר ואחרת היא לא עוצרת.

אנומרטור: פונ' חשיבה (יש מ"ט שמחשבת אותה) ועל $f: \mathbb{N} \to L$.

אנומרטור מונוטוני: לכל $i < j$ מתקיים: $f(i) \overset{\text{(לקסיקוגרפי)}}{<} f(j)$.

LBA: מ"ט עם סרט סופי בגודל הקלט.

מס' הקונפיגורציות: M הוא LBA וגודל הקלט הוא $n \Leftarrow$ יש $|Q| \cdot |\Gamma|^n \cdot n$ קונפיגורציות (מצבים, תוכן הסרט, מיקום הראש).

(*) M הוא LBA. **האם $w \in M$?** נסמלץ את M על w במשך $|Q| \cdot |\Gamma|^n \cdot n + 1$ צעדים. אם לא קיבלנו תו"כ אז יש לולאה אינסופית.

(*) **סדר לקסיקוגרפי:** סידור לפי האורך, ובשוויון אז סידור לפי הא"ב.

(*) כל מ"ט מכריעה/מכריעה למחצה שפה אחת בלבד.

(*) קב' כל מ"ט הקיימות היא בת-מנייה. קב' כל השפות הקיימות מעל Σ היא לא בת-מנייה. ולכן קיימות שפות שלא מקבלת אותן אף מ"ט.

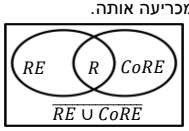
6 שפה כריעה – R, ושפה כריעה למחצה - RE

שפה כריעה (R): יש מ"ט שמכריעה אותה - על כל קלט המ"ט עוצרת (מקבלת מילים שבשפה ודוחה מילים שלא בשפה).

שפה כריעה-למחצה (RE): יש מ"ט שמכריעה למחצה אותה - מ"ט עוצרת ומקבלת כל מילה בשפה, ועל מילים שלא בשפה – לא בהכרח עוצרת. (*) כל מ"ט מכריעה למחצה את השפה שלה.

שפה $CoRE$: שפה שהמשלים שלה הוא ב-RE.

(*) לכל שפה רגולרית/ח"ה קיימת LBA שמכריעה אותה.



(*) $\bar{L} \in CoRE \Leftrightarrow L \in RE$.

(*) $\bar{L} \in R \Leftrightarrow L \in R$.

(*) $R = RE \cap CoRE$ $(R \subseteq RE)$.

(*) $L \in R \Leftrightarrow L, \bar{L} \in RE$.

(*) $L \notin R \Leftrightarrow L \in RE$ או ש-$\bar{L} \notin RE$.

(*) $\bar{L} \notin RE \Leftrightarrow L \in RE \backslash R$.

טענה: אם $L \in RE \Leftarrow$ קיימת תת-שפה אינסופית $L' \subseteq L$ כך ש-$L' \in R$.

טענה: L אינסופית $\Leftarrow$ קיימת תת-שפה אינסופית $L' \subseteq L$ כך ש-$L' \notin R$.

טענה: שפה שהתשובה אליה היא **תמיד** "כן" או "לא", שייכת ל-R (כמו במקרה "האם יש חיידקים?").

שפות כריעות (R) סגורות לפעולות: איחוד – נסמלץ מכונה אחת אחרי השנייה עד שמישהי תקבל. חיתוך – נוודא שכל המכונות מקבלות. שירשור – אורך הקלט סופי ולכן ניתן לבדוק את כל האפשרויות. משלים – נסמלץ מכונה ונחזיר את התשובה ההפוכה. *Kleene Star* – נסמן $W = \{w_{i,j} | w_{i,1} \dots w_{i,k} = x,\ \pi_i \text{ splits } x \text{ into } 1 \le k \le |x| \text{ words}\}$, כאשר x זה הקלט. נסמלץ את מ"ט על כל המילים שבקב' W. אם קיים i כך שמ"ט קיבלה את כל המילים $w_{i,1}, \dots, w_{i,k}$ אז נקבל.

שפות כריעות למחצה (RE) סגורות לפעולות: איחוד – נסמלץ את המכונות במקביל (צעד אחד בכל מכונה) עד שמישהי תקבל. חיתוך - נוודא שכל המכונות מקבלות. *Kleene Star* – אותו דבר כמו ב-R רק שהפעם נסמלץ את המילים במקביל.

רדוקצייה רגילה: $A \le B$. רדוקציה מ-A (הבעיה הקטנה) ל-B (הבעיה הגדולה): (1) אם $A \in R \Leftarrow B \in R$. (2) אם $B \notin R \Leftarrow A \notin R$.

(*) כדי להוכיח ש-$B \notin R$, נקח $A \notin R$ ועי' $A \le B$: נניח בשלילה ש-$B \in R$ ושיש מ"ט M שמכריעה את B. נבנה בעזרת M מ"ט M' שמכריעה את A ונקבל סתירה.

רדוקציית מיפוי: $A \le_m B$. קיימת פונ' חשיבה $f: \Sigma^* \to \Sigma^*$ כך ש- $w \in A \Leftrightarrow f(w) \in B$ ומתקיים:

(1a) אם $A \in R \Leftarrow B \in R$. (1b) אם $A \in RE \Leftarrow B \in RE$.

(2a) אם $B \notin R \Leftarrow A \notin R$. (2b) אם $B \notin RE \Leftarrow A \notin RE$.

(2c) אם $B \notin CoRE \Leftarrow A \notin CoRE$.

(*) $A \le_m B \Leftarrow \bar{A} \le_m \bar{B}$ (יש להם את אותה פונ' חשיבה f).

(*) לכל $A, B \in R$ כך ש-$B \neq \emptyset, \Sigma^*$ מתקיים: $A \le_m B$.

(*) קיום רדוקציית מיפוי גורר קיום של רדוקצייה רגילה. ההפך לא נכון.

$RE - Complete$: B נקראת $RE - Complete$ אם: (1) $B \in RE$.

(2) לכל $A \in RE$ מתקיים: $A \le_m B$.

(*) A_{TM} היא $RE - Complete$.

כיצד להראות R? (1) אלגוריתם שמכריע את הבעיה. (2) רדוקצייה **אל** בעיה ידועה ב-R. (3) הוכחה שהיא והמשלימה שלה ב-RE. (4) קיים אנומרטור מונוטוני לשפה. (5) להראות שהבעיה היא "סופית". **בעיות סופיות:** (1) בעיות עם מס' סופי של שאילתות הן תמיד ב-R. (2) בעיות שמס' השאילתות בהם מוחזר כן/לא (מספיק אחד מהם) הוא סופי.

כיצד להראות R? (1) באמצעות שיטת האלכסון של קנטור.

(2) רדוקצייה **מ**בעיה ידועה **שלא** ב-R. (3) משפט רייס.

כיצד להראות RE? (1) אלגוריתם המכריע למחצה את הבעיה.

(2) רדוקציית מיפוי **אל** בעיה ידועה ב-RE. (3) קיים אנומרטור לשפה.

כיצד להראות RE? (1) רדוקציית מיפוי **מ**בעיה ידועה **שלא** ב-RE.

(2) "חיקוי" הוכחת משפט רייס.

כיצד להראות $CoRE$? (1) רדוקציית מיפוי **אל** בעיה ידועה ב-$CoRE$.

(2) להראות שהמשלים שלה ב-RE ושזו אינה בעיה ב-R.

כיצד להראות $CoRE$? (1) רדוקציית מיפוי **מ**בעיה ידועה **שלא** ב-$CoRE$. (2) "חיקוי" הוכחת משפט רייס.

משפט רייס: כל שפת מ"ט לא טריוויאלית וסמנטית איננה ב-R.

L שפת מ"ט: כל $X \in L$ הוא קידוד של מ"ט, כלומר $L = \{\langle M\rangle \mid \dots\}$.

L לא טריוויאלית: קיימות מ"ט M_1, M_2 כך ש- $\langle M_1\rangle \in L$ ו- $\langle M_2\rangle \notin L$.

(*) שפה טריוויאלית זה השפה $\emptyset$ או השפה Σ^*.

L סמנטית: אם $L(M_1) = L(M_2)$ אז: $\langle M_1\rangle \in L \Leftrightarrow \langle M_2\rangle \in L$, כלומר אסור שיהיו איפיונים על איך המ"ט פותרת את הבעיה.

הוכחת משפט רייס: $L_C = \{\langle M\rangle | L(M) \in C\}$, $C \subseteq RE$. נגדיר L_C, כאשר L_C מקיימת את תנאי משפט רייס. אם $\emptyset \notin C$ אז מוכיחים את משפט רייס ע"י $A_{TM} \le_m L_C$, ואם $\emptyset \in C$ אז מסתכלים על $\bar{C}$ ומוכיחים $\overline{A_{TM}} \le_m L_C$ שזה שקול ל- $A_{TM} \le_m \overline{L_C}$.

מסקנה חשובה: (1) אם $\emptyset \in C \Rightarrow L_C \notin RE$ (כי $\overline{A_{TM}} \notin RE$).

(2) אם $\emptyset \notin C$ $\overline{L_C} \notin RE$.

דוגמאות: (1) A_{TM} – לא שפת מ"ט, כי $\langle M, w\rangle \in A_{TM}$ ולא $\langle M\rangle$ כדרוש.

(2) $L = \{\langle M\rangle | L(M) = \overline{A_{TM}}\}$ – טריוויאלית, כי $\overline{A_{TM}} \notin RE \Rightarrow L = \emptyset$.

(3) $L = \{\langle M\rangle | M \text{ accepts } \varepsilon \text{ and } |Q| \in N_{even}\}$ - לא סמנטית.

7 בעיות חשובות ב- $R, RE, CoRE$ וכו'

בעיות כריעות (R ∈):

1) $A_{DFA} = \{\langle A, w\rangle \mid A \text{ is a DFA that accepts } w\}$

2) $A_{CFG} = \{\langle G, w\rangle \mid G \text{ is a CFG that generates } w\}$

3) $A_{LBA} = \{\langle M, w\rangle \mid M \text{ is a LBA that accepts } w\}$

4) $EMPTY_{DFA} = \{\langle A,\rangle \mid A \text{ is a DFA and } L(A) = \emptyset\}$

5) $EMPTY_{CFG} = \{\langle G\rangle \mid G \text{ is a CFG and } L(G) = \emptyset\}$

6) $ALL_{DFA} = \{\langle A\rangle \mid A \text{ is a DFA and } L(A) = \Sigma^*\}$

7) $EQ_{DFA} = \{\langle A, B\rangle | A, B \text{ are DFA and } L(A) = L(B)\}$

בעיות כריעות למחצה (RE ∈):

1) $A_{TM} = \{\langle M, w\rangle \mid M \text{ is a TM that accepts } w\}$

2) $HALT_{TM} = \{\langle M, w\rangle \mid M \text{ is a TM that halts on } w\}$

3) $HALT_\varepsilon = \{\langle M\rangle \mid M \text{ is a TM that halts on } \varepsilon\}$

4) $\overline{A_{TM}}, \overline{HALT_{TM}}, \overline{HALT_\varepsilon} \notin RE$.

בעיות שהמשלים שלהם כריעה למחצה ($CoRE$ ∈):

1) $EMPTY_{TM} = \{\langle M\rangle \mid M \text{ is a TM and } L(M) = \emptyset\}$

2) $EMPTY_{LBA} = \{\langle M\rangle \mid M \text{ is a LBA and } L(M) = \emptyset\}$

3) $ALL_{CFG} = \{\langle G\rangle \mid G \text{ is a CFG and } L(G) = \Sigma^*\}$

4) $EQ_{CFG} = \{\langle G, H\rangle \mid G, H \text{ are CFG and } L(G) = L(H)\}$

5) $EQ_{LBA} = \{\langle M_1, M_2\rangle \mid M_1, M_2 \text{ are LBA and } L(M_1) = L(M_2)\}$

(*) כל מי שב-$CoRE \backslash R$ השפה המשלימה שלו **לא** ב-$CoRE$.

בעיות ממש לא כריעות ($\notin RE$ and $\notin CoRE$):

1) $HALT_{ALL} = \{\langle M\rangle \mid M \text{ is a TM that halts on all inputs}\}$

2) $ALL_{TM} = \{\langle M\rangle \mid M \text{ is a TM and } L(M) = \Sigma^*\}$

3) $EQ_{TM} = \{\langle M_1, M_2\rangle \mid M_1, M_2 \text{ are TM and } L(M_1) = L(M_2)\}$

4) $INFINITE_{TM} = \{\langle M\rangle \mid M \text{ is a TM and } |L(M)| = \infty\}$

5) $REG_{TM} = \{\langle M\rangle \mid M \text{ is a TM and } L(M) \text{ is Regular}\}$

6) $CFL_{TM} = \{\langle M\rangle \mid M \text{ is a TM and } L(M) \text{ is CFL}\}$

(*) כל מי שלא ב-$RE \cup CoRE$ אז גם המשלים שלו **לא** במחלקה זו.

8 רדוקציות רגילות חשובות - $A \le B$

$A_{TM} \notin R$: נניח בשלילה שיש מ"ט H שמכריעה את A_{TM}. נבנה מ"ט D שמקבלת קלט $\langle M\rangle$ ומחזירה תשובה הפוכה מ-H על הקלט $\langle M, \langle M\rangle\rangle$. נריץ את D על הקלט $\langle D\rangle$ ונקבל סתירה.

$HALT_{TM} \notin R$: $A_{TM} \le HALT_{TM}$. נניח בשלילה שיש מ"ט S על הקלט $\langle M', w'\rangle$ שמכריעה את $HALT_{TM}$. נבנה מ"ט S' על קלט $\langle M, w\rangle$ שתכריע את A_{TM} (וכך נקבל סתירה): נריץ את S על $\langle M, w\rangle$, אם S דוחה אז נדחה. אחרת, M בהכרח עוצרת על הקלט w, אז נסמלץ את M על w (כמו מ"ט אוניברסלית) ואם M מקבלת אז נקבל, ואחרת נדחה.

$EMPTY_{TM} \notin R$: $A_{TM} \le EMPTY_{TM}$. נניח בשלילה שיש מ"ט S על הקלט $\langle M'\rangle$ שמכריעה את $EMPTY_{TM}$. נבנה מ"ט S' על קלט $\langle M, w\rangle$ שתכריע את A_{TM}: תחילה נבנה מ"ט M_w על קלט $\langle x\rangle$ שתעבוד כך: (1) אם $x \neq w$ אז נדחה. (2) אם $x = w$ אז נסמלץ את M על w ונקבל אם M קיבלה את w. (נשים לב שאם M מקבלת את w אז $L(M_w) = \{w\}$, ואחרת $L(M_w) = \emptyset$). כעת נריץ את S על קלט $\langle M_w\rangle$ ואם S מקבלת אז נדחה, ואם S דוחה אז נקבל.

$EQ_{TM} \notin R$: $EMPTY_{TM} \le EQ_{TM}$. נניח בשלילה שיש מ"ט S על הקלט $\langle M_1, M_2\rangle$ שמכריעה את EQ_{TM}. נבנה מ"ט S' על קלט $\langle M\rangle$ שתכריע את $EMPTY_{TM}$: תחילה נבנה מ"ט M_{NO} על קלט $\langle x\rangle$ שתעבוד כך: (1) נדחה לכל קלט. (נשים לב ש- $L(M_{NO}) = \emptyset$). כעת נריץ את S על הקלט $\langle M_{NO}, M\rangle$ ואם S מקבלת אז נקבל, ואם S דוחה אז נדחה.

$A_{TM} \le EMPTY_{LBA}$: $EMPTY_{LBA} \notin R$. נניח בשלילה שיש מ"ט S על הקלט $\langle B'\rangle$ שמכריעה את $EMPTY_{LBA}$. נבנה מ"ט S' על קלט $\langle M, w\rangle$ שתכריע את A_{TM}: תחילה נבנה LBA שנסמנו B על קלט $\langle x\rangle$ שיעבוד כך: אם x הוא היסטוריה חישובית מקבלת של M על w אז B תקבל. (נשים לב ש-$L(B)$ יכיל את כל ההיסטוריות החישוביות המקבלות של M על w. ויתקיים ש-M מקבלת את $w \Leftrightarrow L(B) \neq \emptyset$). נריץ את S על $\langle B\rangle$ ואם S מקבלת אז נדחה, ואם S דוחה אז נקבל.

$A_{TM} \le ALL_{CFG}$: $ALL_{CFG} \notin R$. נניח בשלילה שיש מ"ט S על הקלט $\langle G'\rangle$ שמכריעה את ALL_{CFG}. נבנה מ"ט S' על קלט $\langle M, w\rangle$ שתכריע את A_{TM}: תחילה נבנה CFG שנסמנו G. G מייצר את כל המחרוזות שהם לא היסטוריה חישובית מקבלת של M על w (נשים לב שאם M לא מקבלת את w אז $L(G) = \Sigma^*$). כעת נריץ את S על $\langle G\rangle$ ואם S מקבלת אז נדחה, ואם S דוחה אז נקבל.

$EMPTY_{LBA} \le EQ_{LBA}$: $EQ_{LBA} \notin R$. זהה ל- $EMPTY_{TM} \le EQ_{TM}$.

9 רדוקציות מיפוי חשובות - $A \le_m B$

$A \le_m B$ כאשר $A, B \in R$ ו- $B \neq \emptyset, \Sigma^*$: $B \neq \emptyset, \Sigma^*$ ולכן קיים $x_1 \in B$ וקיים $x_2 \notin B$. $A \in R$ ולכן קיימת מ"ט M_A שמכריעה אותה. בהינתן קלט $\langle y\rangle$ לשפה A, $f(\langle y\rangle)$ תהיה מ"ט שפועלת כך: נסמלץ את M_A על y, ואם M_A קיבלה (כלומר $y \in A$) אז נחזיר את $\langle x_1\rangle$ ואחרת נחזיר את $\langle x_2\rangle$.

$HALT_{TM} \le_m A_{TM}$: בהינתן קלט $\langle M, w\rangle$ לשפה A_{TM}, $f(\langle M, w\rangle)$ תהיה מ"ט שפועלת כך: נבנה מ"ט M' על קלט $\langle x\rangle$ שתעבוד כך: נסמלץ את M על הקלט x, ואם M מקבלת את x אז נקבל, ואם M דוחה אז נכנס ללולאה אינסופית. נחזיר את $\langle M', w\rangle$.

$EMPTY_{TM} \le_m EQ_{TM}$: בהינתן קלט $\langle M\rangle$ לשפה $EMPTY_{TM}$, $f(\langle M\rangle)$ תהיה מ"ט שפועלת כך: נבנה את מ"ט M_{NO} שדוחה כל קלט. נחזיר את $\langle M_{NO}, M\rangle$.

$A_{TM} \le_m \overline{EMPTY_{TM}}$: בהינתן קלט $\langle M, w\rangle$ לשפה A_{TM}, $f(\langle M, w\rangle)$ תהיה מ"ט שפועלת כך: נבנה את M_w כפי שראינו (כך שאם M מקבלת את w אז $L(M_w) = \{w\}$, ואחרת $L(M_w) = \emptyset$). נחזיר את $\langle M_w\rangle$.

$A_{TM} \le_m \overline{EQ_{TM}}$: בהינתן קלט $\langle M, w\rangle$ לשפה A_{TM}, $f(\langle M, w\rangle)$ תהיה מ"ט שפועלת כך: נבנה את מ"ט M_{NO} שדוחה כל קלט. נבנה מ"ט M_2 על קלט $\langle x\rangle$ שתעבוד כך: נסמלץ את M על w, ואם M מקבלת אז נקבל, ואחרת נדחה (נשים לב ש-$L(M_{NO}) = \emptyset$, ושאם M מקבלת את w אז $L(M_2) = \Sigma^*$, ואחרת $L(M_2) = \emptyset$). נחזיר את $\langle M_{NO}, M_2\rangle$.

$A_{TM} \le_m EQ_{TM}$: בהינתן קלט $\langle M, w\rangle$ לשפה A_{TM}, $f(\langle M, w\rangle)$ תהיה מ"ט שפועלת כך: נבנה את מ"ט M_{YES} שמקבלת כל קלט. נבנה מ"ט M_2 על קלט $\langle x\rangle$ שתעבוד כך: נסמלץ את M על w, ואם M מקבלת אז נקבל, ואחרת נדחה (נשים לב ש-$L(M_{YES}) = \Sigma^*$, ושאם M מקבלת את w אז $L(M_2) = \Sigma^*$, ואחרת $L(M_2) = \emptyset$). נחזיר את $\langle M_{YES}, M_2\rangle$.

$HALT_{TM} \le_m HALT_{ALL}$: בהינתן קלט $\langle M, w\rangle$ לשפה $HALT_{TM}$, $f(\langle M, w\rangle)$ תהיה מ"ט שפועלת כך: נבנה מ"ט M' על קלט $\langle x\rangle$ שתעבוד כך: נסמלץ את M על w. אם M עצרה אז נקבל (נשים לב שאם M עצרה על w אז M' עוצרת על כל הקלטים, ואחרת M' לא עוצרת על אף קלט). נחזיר את $\langle M'\rangle$.

$HALT_{TM} \le_m HALT_\varepsilon$: בדיוק כמו $HALT_{TM} \le_m HALT_{ALL}$.

$\overline{HALT_{TM}} \le_m HALT_{ALL}$: בהינתן קלט $\langle M, w\rangle$ לשפה $\overline{HALT_{TM}}$, $f(\langle M, w\rangle)$ תהיה מ"ט שפועלת כך: נבנה מ"ט M' על קלט $\langle y\rangle$ שתעבוד כך: נסמלץ את M על w במשך $|y|$ צעדים. אם M לא עצרה אז נקבל, ואחרת נכנס ללולאה אינסופית (נשים לב שאם M לא עוצרת על w אז $|L(M_0)| = \infty$, ואחרת אם M כן עוצרת על w אז זה קורה לאחר מס' סופי של צעדים ולכן $|L(M_0)| < \infty$). נחזיר את $\langle M_0\rangle$.

$A_{TM} \le REG_{TM}$: בהינתן קלט $\langle M, w\rangle$ לשפה A_{TM}, $f(\langle M, w\rangle)$ תהיה מ"ט שפועלת כך: נבנה מ"ט M_2 על קלט $\langle x\rangle$ שתעבוד כך: אם x מהצורה 0^n1^n אז נקבל. אחרת, נסמלץ את M על w, ואם M קיבלה את w אז נקבל. (נשים לב שאם M מקבלת את w אז $L(M_2) = \Sigma^*$, ואחרת $L(M_2) = \{0^n1^n | n \ge 0\}$). נחזיר את $\langle M_2\rangle$.

$A_{TM} \le CFL_{TM}$: אותו רעיון כמו ב- $A_{TM} \le REG_{TM}$, פרט לכך שנחליף את 0^n1^n ב- $0^n1^n2^n$.

10 הוכחות נוספות של שפות חשובות

PCP: $= \{\langle P\rangle | P \text{ is an instance of the PCP with a match}\} \in R$ הוכחה ע"י $A_{TM} \le PCP$.

AMB: $= \{\langle G\rangle | G \text{ is an ambigous CFG}\} \in R$ אם G ambigous קיימים לפחות 2 גזירות שונות של w ב-G. הוכחה ע"י $PCP \le AMB$.

$EMPTY_{TM} \in CoRE$: נבנה מ"ט S על הקלט $\langle M\rangle$ שתכריע למחצה את $\overline{EMPTY_{TM}}$ ותעבוד כך: יהי $x_1, x_2, \dots$ הסדר הלקסיקוגרפי של כל המילים. עבור $i = 1, \dots, \infty$ נסמלץ את M על $x_1, \dots, x_i$ במשך i צעדים, ואם M מתישהו תקבל אחד מהם אז S תקבל.

$EQ_{LBA} \in CoRE$: נבנה מ"ט שתכריע למחצה את $\overline{EQ_{LBA}}$: נעבור על כל המילים לפי סדר א"ב ונבדוק לכל מילה האם היא שייכת רק לאחת מהשפות. אם מצאנו מילה כזאת אז נקבל, ואחרת נהיה בלולאה אינסופית.

$EMPTY_{LBA} \in CoRE$: נבנה מ"ט שתכריע למחצה את $\overline{EMPTY_{LBA}}$: נעבור על כל המילים לפי סדר א"ב ונבדוק לכל מילה האם היא שייכת לשפה. אם מצאנו מילה כזאת אז נקבל, ואחרת נהיה בלולאה אינסופית.

$REG_{TM} \notin RE$: לפי חיקוי של הוכחת משפט רייס. נקח את C להיות כל השפות הרגולריות ומתקיים $REG_{TM} = L_C \notin RE \Leftarrow \emptyset \in C$.

$CFL_{TM} \notin RE$: אותו רעיון כמו ב- $REG_{TM} \notin RE$.

$HALT_{TM} \leq_m L$: $L = \{\langle M\rangle | L(M) \in R\} \notin R, CoRE$: בהינתן קלט $\langle M,w\rangle$ לשפה $HALT_{TM}$, $f(\langle M,w\rangle)$ תהיה מ"ט שפועלת כך: נבנה מ"ט S על קלט $\langle M',w'\rangle$ שתעבוד כך: נסמלץ את M' על w' ואת M על w במקביל, ונקבל אם אחת מהן עצרה (נשים לב שאם M עוצרת על w אז $L(S) = \{\langle M',w'\rangle | M' \text{ is a TM}\} \in R$ וזה ב-R כי זה פשוט לבדוק האם M' קידוד תקין של מ"ט. ואם M לא עוצרת על w אז נקבל רק אם M' עצרה על w' ולכן $L(S) = HALT_{TM}$). נחזיר את $\langle S\rangle$.

$L = \{\langle M\rangle | L(M) \in RE\} \in R$: טריוויאלי, מכיוון שלכל מ"ט M מתקיים ש- $L(M) \in RE$ (כל מ"ט מכריעה למחצה את השפה שלה).

$L = \{\langle M\rangle | L(M) \in CoRE \backslash R\} \in R$: טריוויאלי,כי $L = \emptyset$, וזה מכיוון שלשפה ב-$CoRE\backslash R$ אין מ"ט M שמקבלת אותה.

$HALT_{TM} \leq_m L$: $L = \{\langle M\rangle | \exists_w \text{ s.t } M \text{ halts on } w\} \in RE \backslash R$: ב-$\underline{RE}$: יהי $x_1, x_2, \dots$ הסדר הלקסיקוגרפי של כל המילים. עבור $i = 1, \dots, \infty$ נסמלץ את M על $x_1, \dots, x_i$ במשך i צעדים, ונקבל אם M עצרה על קלט כלשהו. לא ב-$\underline{R}$: בהינתן קלט $\langle M,w\rangle$ לשפה $HALT_{TM}$, $f(\langle M,w\rangle)$ תהיה מ"ט שפועלת כך: נבנה מ"ט M' על קלט $\langle x\rangle$ שתעבוד כך: נסמלץ את M על w ונקבל אם M עצרה (נשים לב שאם M עוצרת על w אז M' עוצרת על כל קלט, ואחרת M' לא עוצרת על כל קלט). נחזיר את $\langle M'\rangle$.

$L = \{\langle M,x,y\rangle | M \text{ halt on exactly one of } x,y\} \notin RE, CoRE$: לא ב-$\underline{RE}$: בהינתן קלט $\langle M\rangle$ לשפה $\overline{HALT_\varepsilon}$, $f(\langle M\rangle)$ תהיה מ"ט שפועלת כך: נבנה מ"ט M' על קלט $\langle x\rangle$ שתעבוד כך: אם $x = 0$ אז נסמלץ את M על ε, ואחרת נדחה. נחזיר את $\langle M', 0,1\rangle$ (נשים לב שאם M עוצרת על ε אז M' עוצרת גם על 0 וגם על 1, ואחרת M' עוצרת רק על 1). לא ב-$\underline{CoRE}$: בהינתן קלט $\langle M\rangle$ לשפה $HALT_\varepsilon$, $f(\langle M\rangle)$ תהיה מ"ט שפועלת כך: נבנה מ"ט M' על קלט $\langle x\rangle$ שתעבוד כך: אם $x = 0$ אז נסמלץ את M על ε, ואחרת נכנס ללולאה אינסופית. נחזיר את $\langle M', 0,1\rangle$ (נשים לב שאם M עוצרת על ε אז M' עוצרת רק על 0, ואחרת M' לא עוצרת על 0 וגם לא על 1).

$L = \{< M,x > | M \text{ can only move right}, M \text{ halts on } x\} \in R$. נבנה מ"ט שתכריע את L: נסמלץ את M על x במשך $|x| + |Q| + 1$ צעדים ונקבל אם M עצרה. נכונות: לאחר $|x|$ צעדים הגענו לרווח, ואם לא עצרנו במשך $|x| + |Q|$ צעדים אז אנחנו בלולאה אינסופית.

$L = \{\langle M\rangle | \forall_w M \text{ never reaches position } |w| + 7 \text{ on tape}\} \in CoRE \backslash R$: ב-$\underline{CoRE}$: יהי $x_1, x_2, \dots$ הסדר הלקסיקוגרפי של כל המילים. עבור $i = 1, \dots, \infty$ נסמלץ את M על $x_1, \dots, x_i$ במשך i צעדים, ונקבל אם M הגיעה למקום ה- $|x_i| + 7$ בסרט על קלט x_i כלשהו. לא ב-$\underline{R}$: $\overline{A_{TM}} \leq_m L$: בהינתן קלט $\langle M,w\rangle$ לשפה $\overline{A_{TM}}$, $f(\langle M,w\rangle)$ תהיה מ"ט שפועלת כך: נבנה מ"ט M' על קלט $\langle x\rangle$ שתעבוד כך: אם x זה היסטוריה חישובית מקבלת של M על w אז נמשיך לרוץ ימינה על הסרט אינסוף פעמים, ואחרת נעצור (נשים לב שאם M לא מקבלת את w אז לכל $\langle x\rangle$, M' תעצור לפני ההגעה למיקום $|x| + 7$, ואחרת קיים $\langle x\rangle$ כך ש-M' כן תעבור את המיקום $|x| + 7$). נחזיר את $\langle M'\rangle$.

$L = \left\{\langle M\rangle \middle| \forall_w M \text{ never reaches position } \left\lceil \frac{|w|+1}{2} \right\rceil \text{ on tape}\right\} \in R$: L זה בעצם שפת מ"ט שתמיד נשארות על התא ה-1 בסרט, וזה כי עבור כל קלט שהוא תו אחד אז אסור למ"ט לעבור את התא ה-1, אבל כל קלט באורך כלשהו מתחיל מתו אחד, ולכן גם לו אסור לעבור את התא ה-1. נסמלץ את M על כל הקלטים באורך 1 במשך $|Q| \cdot |\Gamma| + 1$ צעדים, ואם לא עברנו את התא ה-1 באף אחד מהם אז נקבל.

הוכחת משפט רייס: הוכחת $A_{TM} \leq_m L_C$: בהינתן קלט $\langle M,w\rangle$ לשפה A_{TM}, $f(\langle M,w\rangle)$ תהיה מ"ט שפועלת כך: אנו יודעים ש- $\emptyset \notin C$, וכן שקיימת $M_L \in L_C$ (כי L_C לא טריוויאלית) ולכן $L(M_L) = L \in C \subseteq RE$. נבנה מ"ט M_0 על קלט $\langle y\rangle$ שתעבוד כך: נסמלץ את M על w. אם M דחתה אז נדחה. אם M קיבלה אז: נסמלץ את M_L על y, ואם M_L קיבלה אז נקבל ואחרת נדחה (נשים לב שאם M דוחה את w אז $L(M_0) = \emptyset$, ואחרת $L(M_0) = L(M_L) = L$). נחזיר את $\langle M_0\rangle$.

11 סיבוכיות וזמן ריצה

זמן ריצה דטרמינסטי: M מ"ט דטרמיניסטית שעוצרת על כל הקלטים. זמן הריצה של M זה הפונ' $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, כאשר $f(n)$ זה מס' הצעדים המקסימלי ש-M עושה על קלט כלשהו באורך n.

DTIME: $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. $DTIME(f(n))$ זה קב' הבעיות שניתן להכריע בזמן ריצה דטרמינסטי של $O(f(n))$, כאשר n הוא אורך הקלט.

(*) $DTIME(t_1(n)) \subseteq DTIME(t_2(n)) \Leftarrow t_1(n) = O(t_2(n))$.

(*) $\exists_{c,n_0 \in \mathbb{N}}. \forall_{n \geq n_0}. f(n) \leq c \cdot g(n) \Leftrightarrow f(n) = O(g(n))$.

(*) זמן הריצה תלוי במודל מ"ט (סרט אחד, מס' סרטים וכו').

טענה: אם מ"ט עם מס' סרטים מכריעה את השפה L בזמן $t(n) \geq n$, אז קיימת מ"ט עם סרט אחד שמכריעה את L בזמן $O(t^2(n))$.

נכונות: נובעת מכך שבמ"ט עם מס' הסרטים כל צעד לוקח $O(1)$ ויש לנו $t(n)$ צעדים, לעומת מ"ט עם סרט אחד שכל צעד לוקח $O(t(n))$ (כי זה מס' התאים המקסימלי שמ"ט עם מס' הסרטים משתמשת בהם).

המחלקה ***P***: $P = \bigcup_{c \geq 0} DTIME(n^c)$ - קב' השפות שקיימות להן מ"ט דטרמיניסטית שמכריעה אותן בזמן פולינומיאלי. (*) $P \subseteq R$.

(*) שייכות למחלקה P לא מושפעת ממודל מ"ט (מס' סרטים וכו').

טענה: כל שפה ח"ה שייכת למחלקה P (הוכחה ע"י שימוש בתיכנות דינאמי ובטבלה).

זמן ריצה לא-דטרמינסטי: M מ"ט לא-דטרמיניסטית. כל "ענף" של מ"ט M חייב לעצור על כל הקלטים. זמן הריצה של M זה הפונ' $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, כאשר $f(n)$ זה מס' הצעדים המקסימלי ש-M עושה בכל "ענף" על קלט כלשהו באורך n.

NTIME: $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. $NTIME(f(n))$ זה קב' הבעיות שניתן להכריע בזמן ריצה לא-דטרמינסטי של $O(f(n))$, כאשר n הוא אורך הקלט.

טענה: אם מ"ט לא-דטרמיניסטית מכריעה את השפה L בזמן $t(n) \geq n$, אז קיימת מ"ט דטרמיניסטית שמכריעה את L בזמן $2^{O(t(n))}$.

המחלקה ***NP***: $NP = \bigcup_{c \geq 0} NTIME(n^c)$ - קב' השפות שקיימות להן מ"ט לא-דטרמיניסטית שמכריעה אותן בזמן פולינומיאלי. (*) $NP \subseteq R$.

מוודא לשפה: מ"ט M נקראת מוודא לשפה L אם: (1) M תמיד עוצרת. (2) $w \in L \Leftrightarrow$ קיים c (נקרא "עד") כך ש-M מקבלת את $\langle w,c\rangle$. כלומר, $L = \{w \mid M \text{ accepts } \langle w,c\rangle \text{ for some string } c\}$. המוודא משתמש במחרוזת c כדי לקבוע האם $w \in L$.

מוודא פולינומיאלי: מוודא שרץ בזמן פול' ב-$|w|$ (ולכן $|c| \leq |w|^{O(1)}$).

(*) לשפה L יש מוודא פול' $\Leftrightarrow L \in NP$.

רדוקציית מיפוי פולינומיאלית: $A \leq_p B$. קיימת פונ' $f: \Sigma^* \to \Sigma^*$ שניתנת לחישוב בזמן פול' כך ש- $w \in A \Leftrightarrow f(w) \in B$ ומתקיים:

(1) אם $A \in P$. (2) אם $A \in NP \Leftarrow B \in P$ $B \in NP$.

(העד של A יהיה $f(x)$).

(*) אם $A, B \in P$ ו-$B \neq \emptyset, \Sigma^* \Leftarrow$ הרדוקצייה $A \leq_p B$ נכונה.

(*) אם $B \neq \emptyset \Leftarrow$ הרדוקצייה $\emptyset \leq_p B$ נכונה.

(*) אם $B \neq \emptyset \Leftarrow$ הרדוקצייה $\Sigma^* \leq_p B$ נכונה.

NP – Hard (NPH): זו הקב' $\{L | \forall_{L' \in NP}. L' \leq_p L\}$.

(*) $L = \{\langle M\rangle | L(M) \in C\}$, $C \subseteq RE$, ו-$C \neq \emptyset, RE \Rightarrow L \in NPH$.

NP – Complete (NPC): B נקראת NPC אם:

(1) $B \in NP$. (2) לכל $A \in NP$ מתקיים: $A \leq_p B$.

טענה: אם $B \in NPS$, $C \in NP$ ו- $C \leq_p B \Rightarrow C \in NPC$.

טענה: אם B היא NPC וגם $B \in P \Rightarrow P = NP$.

(*) $NPC = NP - Hard \cap NP$.

המחלקה ***CoNP***: זו הקב' $\{L | \overline{L} \in NP\}$.

טענה: אם מתקיים אחד מהתנאים הבאים אז מתקיים $NP = CoNP$:

(1) אם $NP = P$. (2) אם $CoNP \subseteq NP$.

(3) אם קיימת שפה $L \in NPC \cap CoNP$.

12 בעיות חשובות ב-P וב-NP

בעיות במחלקה P:

1) $A_{NFA} = \{\langle N,w\rangle \mid N \text{ is a NFA that accepts } w\}$
2) $Path = \{\langle G,s,t\rangle \mid G \text{ has directed path from } s \text{ to } t\}$
3) $RelPrime = \{\langle x,y\rangle \mid 1 \text{ is the largest int that divides } x,y\}$
4) $2SAT = \{\langle\phi\rangle \mid \phi \text{ is satisfiable } 2CNF \text{ formula}\}$
5) $DNF - SAT = \{\langle\phi\rangle \mid \phi \text{ is satisfiable DNF formula}\}$
(*DNF* – מורכב מפסוקיות $(x_1 \wedge \dots \wedge x_k)$ שביניהם יש $\vee$)
6) $2COL = \{\langle G\rangle \mid G \text{ is an undirected 2 colorable graph}\}$

בעיות במחלקה NP:

1) $HamPath = \{\langle G,s,t\rangle \mid G \text{ has hamilton path from } s \text{ to } t\}$
(מסלול המילטון – מסלול שעובר בכל צומת בדיוק פעם אחת)
2) $HamCircuit = \{\langle G\rangle \mid G \text{ has hamilton circuit}\}$
3) $uHamPath$, $uHamCircuit$: גירסאות עם גרף לא מכוון
4) $Composites = \{\langle x\rangle \mid x = p \cdot q, \text{for integers } p,q > 1\}$
5) $SubsetSum = \{\langle S,t\rangle \mid S = \{a_1, \dots, a_n\}, \exists_{A \subseteq S}. \sum_{a \in A} a = t\}$
6) $Partition = \{\langle S\rangle \mid \exists_{A,B \subseteq S}. \sum A = \sum B, A \cap B = \emptyset, A \cup B = S\}$
7) $SAT = \{\langle\phi\rangle \mid \phi \text{ is satisfiable Boolean formula}\}$
(*satisfiable* - ספיקה - קיימת הצבה שהתוצאה שלה היא 1)
8) $3SAT = \{\langle\phi\rangle \mid \phi \text{ is satisfiable } 3CNF \text{ formula}\}$
(*CNF* – מורכב מפסוקיות $(x_1 \vee \dots \vee x_k)$ שביניהם יש $\wedge$)
(*3CNF* – בכל פסוקית יש 3 משתנים $(x_1 \vee x_2 \vee x_3)$)
9) $Clique = \{\langle G,k\rangle \mid G = \text{undirected graph with a } k\text{_clique}\}$
(*clique* - תת-גרף שבו בין כל 2 צמתים יש קשת)
(*clique – k* עם k צמתים)
10) $IndepSet = \{\langle G,k\rangle \mid G \text{ has independent set of size } k\}$
(*independent set* – קב' צמתים שאין ביניהם אף קשת בגרף)
11) $VertexCover = \{\langle G,k\rangle \mid G \text{ has vertex cover of size } k\}$
(*vertex cover* - קב' צמתים שנוגעות בכל הקשתות בגרף)
12) $SetCover = \{\langle S, A_1, \dots, A_n, k\rangle \mid \exists k \text{ sets } A_i \text{ s.t they cover } S\}$
(*cover* – S מוכל באיחוד k הקב' A_i)
13) $TSP = \{\langle C,D,k\rangle \mid (C,D) \text{ has a tour of distance} \leq k\}$
(בעיית המוכר המטייל – C-קב' ערים. D-המרחקים בין הערים)
14) $3COL = \{\langle G\rangle \mid G \text{ is an undirected 3 colorable graph}\}$
(*colorable* – עבור 2 צמתים שיש קשת ביניהם, צבעם שונה)

בעיות שלא במחלקה NP: $\overline{HamPath}$, $\overline{Clique}$, $\overline{SubsetSum}$.

בעיות ב-NPH אבל לא ב-NP: $MaxClique$, $MaxIS$, $MinVC$.
(הכוונה במקס' זה שלא קיימת את התכונה עבור $j > k$).

בעיות במחלקה $\overline{NPH} \cup NPH$:
$Clique \oplus IS = \{\langle G,k\rangle \mid G \text{ has: a } k\text{_clique XOR an IS of size } k\}$

13 הוכחות לבעיות חשובות ב-P וב-NP

$A \leq_p B$ כאשר $A, B \in P$ ו- $B \neq \emptyset, \Sigma^*$: $x_1 \in B$ ולכן קיימים $x_2 \notin B$ ו- $x_2 \in A \in P$. ולכן קיימת מ"ט M_A שמכריעה אותה בזמן פולי". בהינתן קלט $\langle y\rangle$ לשפה A, $f(\langle y\rangle)$ תהיה מ"ט שפועלת כך: נסמלץ את M_A על y, ואם M_A קיבלה (כלומר $y \in A$) אז נחזיר את $\langle x_1\rangle$ ואחרת נחזיר את $\langle x_2\rangle$.

$A_{NFA} \in P$: נסיר את כל מעברי ה-ε כפי שלמדנו. מהמצב q_0 נבדוק לאילו מצבים ניתן להגיע עם התו ה-1 ב-w (יש לכל היותר $|Q|$ מצבים כאלה). ממצבים אלו נבדוק לאילו מצבים ניתן להגיע עם התו ה-2 ב-w, וכך הלאה. בכל שלב (מס' השלבים הוא $|w|$) אנו עוברים על לכל היותר $|Q|^2$ מצבים ולכן בסה"כ נקבל זמן פול' של $O(|Q|^2 \cdot |w|)$.

$Path \in P$: נסמן את s. כל עוד סימנו צומת חדש נבצע: נעבור על כל הקשתות. עבור כל קשת (a,b) כך ש-a מסומן ו-b לא מסומן, נסמן את b. אם בסוף t מסומן אז נקבל, ואחרת נדחה.

$RelPrime \in P$: אם $GCD(x,y) = 1$ אז נקבל ואחרת נדחה.

$DNF - SAT \in P$: בגלל שבין הפסוקיות יש OR, אז מספיק לבדוק האם קיימת פסוקית שבה אין את המשתנה x ואת המשתנה המשלים לו $\bar{x}$, במידה ויש פסוקית כזאת אז קיימת הצבה כך ש-ϕ ספיקה.

$2COL \in P$: למדנו באלגוריתמים (בודקים אם הגרף הוא דו"צ).

$SAT \in NPC$: משתמשים בטבלה דו-מימדית בגודל $t(n) \times t(n)$ שנקראת $The\ Tableau$. הטבלה מכילה את ההיסטוריה החישובית של M על w (כל שורה זאת קונפיגורציה). הנוסחה תהיה:
$\phi_w = \phi_{unique(M)} \wedge \phi_{start(w)} \wedge \phi_{accept(M)} \wedge \phi_{compute(M)}$, כאשר:
$\phi_{unique(M)}$ - מבטיח שכל קונפ' היא קונפ' חוקית. $\phi_{start(w)}$ - מבטיח שהשורה ה-1 זאת קונפ' התחלתית של w. $\phi_{accept(M)}$ - מבטיח ש-M הגיעה לקונפ' מקבלת. $\phi_{compute(M)}$ – מבטיח שהקונפ' בשורה $i+1$ התקבלה מהקונפ' שבשורה i.

$HamPath \leq_p HamCircuit$: נוסיף קשת מ-$t$ אל צומת חדש u ומצומת זה קשת אל s (חייבים את הצומת החדש מאחר שבלעדיו הרדוקצייה לא נכונה).

$HamCircuit \leq_p uHamCircuit$: נפצל כל צומת $v \in V$ ל-3 צמתים v_{in}, v_{mid}, v_{out}.

$uHamCircuit \leq_p uHamPath$: נבחר צומת כלשהו u ונפצל אותו ל-u_1, u_2, ועבור הקשת $\{u,v\}$ יהיה את הקשתות $\{u_1,v\}, \{u_2,v\}$. נוסיף 2 צמתים חדשים s,t, ונוסיף את הקשתות $\{s,u_1\}, \{u_2,t\}$. נחזיר את $\langle G', s, t\rangle$.

$SAT \leq_p 3SAT$: לכל משתנה בכל פסוקית ניצור פסוקית חדשה. למשל עבור הפסוקית $\phi = (x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4)$ יהיה את הפסוקית: $\phi_3 = (x_1 \vee y_1) \wedge (\overline{y_1} \vee x_2 \vee y_2) \wedge (\overline{y_2} \vee x_3 \vee y_3) \wedge (\overline{y_3} \vee x_4)$.
ומתקיים: ϕ ספיקה $\Leftrightarrow \phi_3$ ספיקה.

$3SAT \leq_p Clique$: יש k פסוקיות ב-ϕ. לכל משתנה בכל פסוקית ניצור צומת (סה"כ $3k$ צמתים), ונמתח קשת ממנו לכל שאר המשתנים שמקיימים: (1) לא נמצא איתו בפסוקית. (2) לא המשתנה המשלים לו.
ויתקיים: ϕ ספיקה $\Leftrightarrow$ בגרף שבנינו קיים $k - clique$.
(*) בגרף שבנינו לא יכול להיות $clique$ שגדול מ-k.

$IndepSet \leq_p Clique$: נבנה את הגרף המשלים $G^C = (V, E^C)$ כך ש-$E^C = \{(v,u) | v,u \in V \text{ and } (v,u) \notin E\}$. ויתקיים: ל-$G$ יש $independent\ set$ בגודל $k \Leftrightarrow$ ל-G^C יש $k - clique$.
גם הרדוקציה ההפוכה מתקיימת $Clique \leq_p IndepSet$.

$IndepSet \leq_p VertexCover$: נחזיר את $\langle G, |V| - k\rangle$.

$VertexCover \leq_p SetCover$: נחזיר את $\langle E, \forall_{v \in V}. A_v, k\rangle$, כאשר $A_v = \{\{u,v\} \in E \mid u \in V\}$.

(*) **הערה כללית:** אם מוסיפים לגרף משולש Δ (3 צמתים חדשים ו-3 קשתות חדשות) אז כל $VertexCover$ יהיה חייב להכיל לפחות 2 צמתים מהמשולש.

$SubsetSum \leq_p Partition$: נחזיר את $\langle S \cup a_{n+1}\rangle$, כאשר $a_{n+1} = |\sum a_i - 2t|$.

$HamCircuit \leq_p TSP$: נחזיר $\langle C, D, k\rangle$, כאשר $C = V$, $k = |V|$, ואם $(v_1, v_2) \in E$ אז המרחק בין v_1 ל-v_2 הוא 1, ואחרת הוא 2.

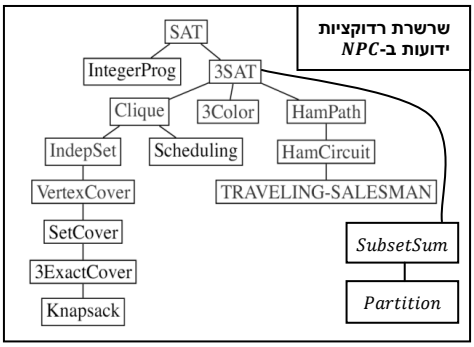
$3COL \leq_p 4COL$: נוסיף צומת חדש שמתחבר לכל שאר הצמתים.

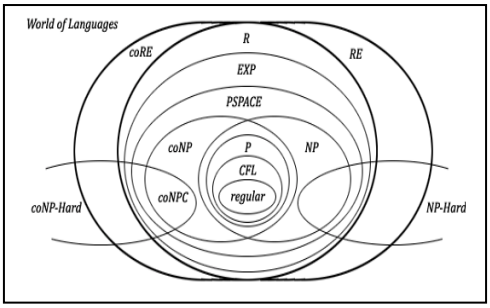
$L \in NP - Hard \Leftarrow L = \{\langle M\rangle | L(M) \in C\}, C \neq \emptyset, RE$. הוכחה: ע"י $SAT \leq_p L$: $C \neq \emptyset, RE$ ולכן קיימות מ"ט $M_1 \in L$ ו- $M_2 \notin L$. בהינתן קלט ϕ לשפה SAT, נבנה מ"ט M על קלט $\langle x\rangle$ שתעבוד כך: נבדוק האם ϕ ספיקה (ע"י בדיקת כל ההשמות האפשריות), ואם ϕ כן ספיקה אז נריץ את M_1 על x, ואחרת נריץ את M_2 על x (נשים לב שאם $\phi \in SAT$ אז $L(M) = L(M_1)$ ולכן $M \in L$, ואחרת $L(M) = L(M_2)$ ולכן $M \notin L$). נחזיר את $\langle M\rangle$. זוהי רדוקצייה פול' מכיוון שאנו רק כותבים קוד של מ"ט שבודקת אם הנוסחה ϕ ספיקה.

$L = \{\langle M\rangle | SAT \leq_p L(M)\} \notin RE, CoRE$: לא ב-$\underline{CoRE}$: ע"י $HALT_{TM} \leq_m L$: בהינתן קלט $\langle M,w\rangle$ לשפה $HALT_{TM}$, $f(\langle M,w\rangle)$ תהיה מ"ט שפועלת כך: נבנה מ"ט M' על קלט $\langle x\rangle$ שתעבוד כך: נסמלץ את M על x. אם מתקיים $x \in 3SAT$ אז נקבל, ואחרת נדחה (נשים לב שאם M עוצרת על x אז $L(M') = 3SAT$ ולכן $M' \in L$, ואחרת $L(M') = \emptyset$). נחזיר את $\langle M'\rangle$. לא ב-$\underline{RE}$: ע"י $\overline{HALT_{TM}} \leq_m L$: בהינתן קלט $\langle M,w\rangle$ לשפה $\overline{HALT_{TM}}$, $f(\langle M,w\rangle)$ תהיה מ"ט שפועלת כך: נבנה מ"ט M' על קלט $\langle x\rangle$ שתעבוד כך: אם מתקיים $x \in 3SAT$ אז נקבל, ואחרת נסמלץ את M על w ונקבל אם M עצרה (נשים לב שאם M לא עצרה על w אז $L(M') = 3SAT$ ולכן $M' \in L$, ואחרת $L(M') = \Sigma^*$). נחזיר את $\langle M'\rangle$. הערה: 2 הרדוקציות חשיבות כי $3SAT$ בעיה כריעה.

$L = \{\langle G\rangle | SAT \leq_m L(G)\} \in RE$: השפה SAT היא כריעה, וגם כל שפה ח"ה היא כריעה, ולכן כדי שהרדוקציה תתקיים אז צריך להתקיים $L(G) \neq \emptyset, \Sigma^*$. קל לבדוק האם $L(G) \neq \emptyset$ (זו בעיה ב-R), אבל לבדוק האם $L(G) \neq \Sigma^*$ זו בעיה ב-RE. ולכן $L \in RE$.

$L = \{\langle M\rangle | L(M) \leq_p SAT\} \in \overline{RE}$ (זאת הייתה שאלה אמריקאית).


שרשרת רדוקציות
ידועות ב-NPC
SAT
IntegerProg
3SAT
Clique
3Color
HamPath
IndepSet
Scheduling
HamCircuit
VertexCover
TRAVELING-SALESMAN
SetCover
$SubsetSum$
3ExactCover
$Partition$
Knapsack


World of Languages
R
coRE
RE
EXP
PSPACE
coNP
P
NP
CFL
coNPC
regular
coNP-Hard
NP-Hard