אלגוריתמים – תרגול 10

תרגיל:
נתון גרף מכוון $G=(V,E)$ ושני קודקודים s,t. רוצים למצוא את המס' המקסימלי של מסלולים, זרים בקשתות מ-s ל-t.

פתרון. ניתן לכל הקשתות קיבול 1 ונמצא זרימה $0,1$.
נכונות: נסמן ב-k את המס' המקסימלי של מסלולים זרים בקשתות מ-s ל-t ונוכיח $|f|=k$.

1. נזרים 1 על כל אחד מ-k המסלולים. הם זרים ולכן לא חרגנו מהקיבולים, וקיבלנו זרימה עם ערך k, כלומר $|f|\geq k$.
2. נוכיח באינדוקציה $|f|\leq k$. עבור $|f|=0$ ברור.
   נניח שהטענה נכונה עבור $|f|=l-1$ ונוכיח עבור l.

   נמחק את כל הקשתות שזורם עליהן 0 – הזרימה לא תשתנה.
   $|f|>0$ לכן קיים מסלול מ-s ל-t. נבחר מסלול כזה ונמחק אותו.
   נשארנו עם זרימה $l-1$ ולפי הנחת האינדוקציה יש $l-1$ מסלולים זרים וביחד עם המסלול שהוצאנו, יש l מסלולים זרים בקשתות.

משפט מנגר (לקשתות)
$G=(V,E)$ גרף מכוון. $s,t\in V$. המס' המקסימלי של מסלולים זרים זרים בקשתות, k, מ-s ל-t שווה למס' המינימלי של קשתות למחוק כדי לנתק את s מ-t.

הוכחה:

1. $l\geq k$:
   חייבים למחוק לפחות קשת אחת מכל אחד מהמסלולים הזרים.
2. $l\leq k$:
   לפי תרגיל קודם, ערך זרימה מקסימלית הוא k.
   לפי *max-flow-min-cut* עם קיבול חתך מינימלי הוא k.
   כל הקיבולים 1, לכן יש בחתך הזה k קשתות מ-s ל-t.
   אם נמחק אותן ננתק את הקבוצות S מ-T ולכן גם את הקודקוד s מ-t.

הערה
נתון גרף לא מכוון $G=(V,E)$ $s,t\in V$. רוצים למצוא את המס' המקסימלי של מסלולים זרים בקשתות מ-s ל-t.
ניתן להפוך את הגרף למכוון, ומשם נמשיך.

תרגיל
נתון גרף לא מכוון $G=(V,E)$. רוצים לכוון אותו כך שלכל קודקוד תהיה דרגת יציאה עד 3 או להגיד אי אפשר.

פיתרון
נבנה גרף דו צדדי $H=\left(V,\underbrace{E}_{\text{קודקוד לכל קשת ב } E},F\right)$.

לכל קשת $e = (u, v) \in E$ יהיו ב-F קשתות $(u, e), (v, e)$.

נכוון את כל הקשתות F מ-V ל-E וניתן להן קיבול 1. נוסיף קודקוד s עם קשתות (s, v) בקיבול 3, לכל $v \in V$.
וקדוקוד t עם קשתות (e, t) בקיבול 1 לכל $e \in E$. נמצא זרימה מקסימלית.

נניח שיש פיתרון, אז לכל $e \in E = (u, v)$ נכוון מ-u ל-v ונזרים 1 על הקשת (u, e). ואם מ-v ל-u נזרים 1 על (v, e).
נשלים זרימה זאת מ-s ל-t. $s \to u \to e \to t$.
דרגת הזרימה של כל הקודקודים עד 3 ולכן כל קודקוד משתתף בעד 3 מסלולים כנ"ל לכן הזרימה על הקשות $\forall v \in V \; 3 \geq (s, v)$.

טענה

אם מנתקים את החתך המינימלי, אז לא ניתן להשיג max-flow *ברשת הזרימה.*