19/02/09

אלגוריתמים - שעור חזרה:

1) נתון גרף לא מכוון $G=(V,E)$ מיוצג ע"י רשימת שכנות, עם משקלים שלמים $1\le w(e)\le |V|$ לכל $e\in E$. ונתונים זוג צמתים $s,t\in V$, תארו אלגוריתם יעיל ככל שתוכלו המוצא מסילה מ-s ל-t כך שהמשקל המירבי של קשת במסילה קטן ככל האפשר.

פתרון - נפעיל את אלגוריתם קרוסקל מ-s בזמן $O(|V|+|E|)$ כי משקל הקשתות ניתן למיין בזמן לינארי. נוסיף את הקשתות לפי הסדר הממוין לגרף, מהקלה לכבדה, עד שנקבל מסלול מ-s ל-t.

סיבוכיות: $O(|V|+|E|+|E|\cdot\alpha(E,V))$

אם קיים מסלול מ-s ל-t, נמצא אותו, האלג' לא יוסיף לגרף קשת (u,v) אם כבר קיים מסלול בין s ל-t, אם קיים מסלול בעל קשת משקל גדולה מ-(u,v). לכן משקל מירבי של קשת במסילה הוא מינימלי אפשרי.

2) נתון גרף $G=(V,E)$ מכוון, $\forall e\in E,\ w(e)>0$. ונתונים $s,t\in V$. מצאו את מספר המסילות הקצרות ביותר מ-s ל-t.

פתרון - נפעיל Dijkstra מ-s (כי כל המשקלים חיוביים). נמחק את כל הקשתות שלא מקיימות את התנאי $d(v)=d(u)+w(u,v)$ (*). הגרף שנשאר הוא אציקלי (אין מעגלים). נמצא את מספר המסילות מ-s ל-t בזמן לינארי (כמו שראינו בתרגול). נקרא לגרף החדש G'.

P מק"ב ב-G $\Longleftrightarrow$ כל קשתות P ב-G'.

$\Leftarrow$ אם $P=<s=v_1,\dots,v_n=t>$ מק"ב, אזי לכל i יתקיים התנאי (*): $d(v_{i+1})=d(v_i)+w(v_i,v_{i+1})$, ולכן כל קשתות P ב-$G'$.

$\Rightarrow$ אם $P=(v_1,\dots,v_n)$ ב-G', אזי לכל קשת (v_i,v_{i+1}) מתקיים התנאי (*) ולכן בהכרח ש- $\delta(s,t)=d(t)=\underbrace{d(s)}_{0}+\sum_{i=0}^{n-1} w(v_i,v_{i+1})=w(P)$.

3) נתון $G=(V,E)$ מכוון, משקלים שלמים: $w(e)\ge 0$ לכל $e\in E$. וכל הקשתות מחולקות לכחולות ואדומות, בהינתן $s,t\in V$ מצאו מק"ב מ-s ל-t שמכיל עד 10 אדומות.

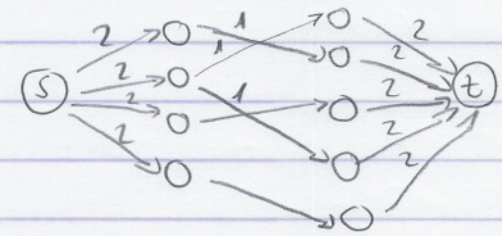
פתרון - נבנה גרף חדש G', (שכפול את הקודקודים 10 פעמים: $V_1,\dots,V_{10}$.
לכל $e\in E$, אם e כחולה, נבנה הקשתות (u_i,w_i) $i=1,\dots,10$ ב-G'.
אם e אדומה, נבנה קשתות (u_i,w_{i+1}). ניקח את המסלול הקצר ביותר:
$s\sim t_i$, $0\le i\le 10$.

(4) גרף מכוון $G=(V,E)$, משקלים שלמים אי-שליליים על צמתים.
מצאו לכל צומת v, את המשקל המירבי של צומת u, כך שיש מסלול מכוון מ-v ל-u.

פתרון- (1) נמצא רכה"ק ב-G (בזמן לינארי).
(2) נמצא מיון טופולוגי של G_{SCC}.
(3) נסמן את הסדר $C_n, \dots, C_1$. כלומר, הקשתות רק מרכה"ק עם אינדקס גבוה לרכה"ק עם אינדקס נמוך.
(4) נמצא לכל i את המשקל המקסימלי שניתן להגיע אליו מ-C_i כך:

$$\max(C_1) = \max_{v\in C_1} w(v) \quad , \quad \max(C_i) = \max\Big(\max_{v\in C_i} w(v), \max_{(C_i,C_j)\in E_{SCC}} \max(C_j)\Big)$$

(5) נתון G גרף לא מכוון. האם ל-G יש תת גרף פורש $H=(V,E')$, $E'\subseteq E$.
שבו דרגת כל צומת היא 2.
(תבדוק את הגרף הזה) ⟵



(6) יהי $G=(V,E)$ לא מכוון, $w(e)\geq 0$, $\forall e\in E$.
חתך כללי הוא חלוקה של הקודקודים ל-2 קבוצות זרות ולא ריקות A,B.
קשתות החתך הן הקשתות שקצה אחד שלהם ב-A והשני ב-B. משקל החתך הוא סכום משקלי קשתות החתך. מצאו חתך כללי מינימלי.

פתרון- נמספר את הצמתים (בסדר אקראי) $v_1, \dots, v_n$.
נמצא min-cut עבור $s=v_i$, $t=v_{i+1}$, $\forall i$.
ונחזיר חלוקה עם משקל חתך s,t מינימלי.

נכונות- עבור חתך A,B מינימלי, נתאים חתך S,T שהוא מינימלי באיזושהי איטרציה.
כלומר, עבור כל חתך A,B נמצא $v_i\in A$, $v_{i+1}\in B$. נעשה זאת ע"י לקיחת ה-i המקסימלי עבור $v_i\in A$, ואז בהכרח ש-$v_{i+1}\in B$.

(7) יהי $G=(V,E)$, $s\in V$.

(א) תארו אלגוריתם המכוון את הקשתות כך שלכל $v\in V$, הזוג (v,s) הוא בעל קשירות פשוטה בגרף המכוון.

(ב) G מכוון, תארו אלגוריתם הבודק האם לכל $v\in V$, הזוג (v,s) הוא בעל קשירות פשוטה, כלומר קיים מסלול פשוט (ללא מעגלים) <u>יחיד</u> מ-s ל-v.

פתרון –

(א) נריץ DFS מ-s, בעץ יהיו קשתות עץ וקשתות אחוריות בלבד (כי לא מכוון).
נכוון את הגרף כך: קשתות עץ - מאב לבן, קשתות אחוריות - מבן לאב קדמון.
<u>נכונות</u> - לפי DFS קיים מסלול מ-s ל-v כי הגרף קשיר.
נניח בשלילה שקיים מסלול נוסף: $v=u_k,\dots,u_1=s$, וגם: $v=w_h,\dots,w_1=s$.
$u_i\neq u_j$, $w_i\neq w_j$ לכל i,j, כי המסלולים פשוטים. לכן, בשני המסלולים יש לעבור בקשת אחורית. נבחר i מינימלי, כך ש- $u_i\neq w_i$ (המקום הראשון בו המסלולים מתפצלים לשני מסלולים שונים). v הוא צאצא של u_i ו- w_i , ולכן מתקבל מעגל בין אב של u_i ו- w_i לבין u, שאינו מכיל קשתות אחוריות, בסתירה לבניית DFS.

(ב) נריץ DFS מ-s. אם לא קיבלנו עץ יחיד אז G לא קשיר והתשובה היא: לא. אחרת, נבדוק אם יש בעץ קשתות קדמיות או חוצות, ובמקרה כזה נחזיר: לא, אחרת נחזיר: כן.

(8) נתון G מכוון, כל קשת צבועה באדום או כחול.
האם קיים מעגל המכיל יותר אדומות מכחולות?

פתרון - נגדיר פונקציית משקל: $w(e)=\begin{cases}1 & \text{כחולה } e\\ -1 & \text{אדומה } e\end{cases}$

נריץ B-F (בלמן פורד), אם מצאנו מעגל שלילי - נחזיר אמת, אחרת - שקר.
<u>הוכחה</u> - יש מעגל שלילי $\Longleftrightarrow$ יש מעגל שסכום קשתותיו שלילי $\Longleftrightarrow$ $w(C)=w(C_B)+w(C_R)<0$ $\Longleftrightarrow$ $|E_B|<|E_R|$.

(9) G מכוון, נמצא $\emptyset\neq U\subseteq V$ קטן ביותר, כך שאין קשת מצביעה מ-U לצומת ב- V-U.

פתרון – U חייבת להיות רק"ח שלא מצביע לצמתי רק"ח אחרים.
<u>בשלילה</u>: אחרת, ניקח את הרק"חים ש-U מצביע אליהם במיון הטופולוגי, ונבחר את הרק"ח הקטן ביותר.