בעיית הכיסוי

Network Power – רוצים למצוא מספר מקומות מינימלי שאפשר כח לרשת טלפונית/אינטרנט. כדי למשל בעיית VC. כיון ש- VC היא בעיה NP-קשה (הרדוקציה מ- IS), נעסה למצוא פתרון אלגוריתמי.

בעיית קליק ו- 3SAT הן בעיות מקומיות. VC היא בעיית מינימיזציה. הפרמטר בבעיית זו הן גם הקליקים, מספר המסלולים ובכל קבוצת ה- cover.

בעיית α-קירוב היא בעיה שמתקיים בה $\alpha O \geq / \alpha O \leq$ (כאשר O כח הפתרון האופטימלי).

אלגוריתם קירוב ל- VC

מתחילים עם קבוצה ריקה C. כל עוד C הוא לא cover, בוחרים קשת מ- E, מוסיפים את 2 הקודקודים שמחוברים אליה ומוחקים את כל הקשתות המחוברות אל קודקודים אלו.

אחרי בונים cover (כיון שאנו ממשיכים עד שהוא הופך לה cover). כמו כן, הפתרון יהיה לכל היותר פי 2 מהאופטימלי. נשים לב, שכל קשת שהכנסנו אורמת להכנסת 2 קודקודים לתוך C. כדי קשת דרוש לפחות קודקוד, אחד מה- 2 שמחוברת אליה. אנחנו בוחרים מכל כל קשת את היותר 2 קודקודים ולכן הקרוב הוא לכל היותר פי 2.

בעיית המילים – רוצים לשלוח מילים עם תווים יש. רשימת תווים אך השימוש בכל רשימה עולה כסף. לכן, רוצים למצוא את הסט הקטן ביותר של רשימות שיכסה את כל התווים. זו בעיה שנקראת Set-Cover. נתונות תתי קבוצות וצריך מס מינימלי מהן כך שכל איבר הקבוצה יהיה מאוחד של תתי הקבוצות.

Set-Cover היא בעיית NP-קשה. מראים זאת בשאיבה מקוקדת מ VC. עבור כל קשת נוצר אלמנט ("נמלה"). עבור כל קודקוד נוצר תת קבוצה שכולל את כל האלמנטים המתאימים לקשתות המחוברות אליו.

* הנה ניתן להשתמש בזה. כלומר בהקדמה כמה שרים יש פתרון קרוב לבעיה (כל להשתמש בו גם עבור הבעיה השניה?
באופן כללי לא (עדיין שהרדוקציה לא בהכרח משמרת את הפיקסיון הקרוב). עם זאת, יש בעיות שמשמרות את הפיקסיון ובמקרים כאלו אפשר. *.

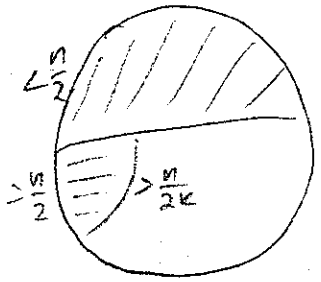
אלגוריתם תמיד לבעיה - האלגוריתם הזה כל עוד כל עוד יש מלמלים שלא נמצאים בפתרון אחד מרשימת הפתרון. האלגוריתם מוחק את הרשימה עם הכי הרבה מלמלים שנמצאים אינם בפתרון הרשימה. (שלב ב).

נראה שאלגוריתם זה מקרב עד לרמה של $\log_2 n$, $\ln n$ ואפילו יותר טוב.

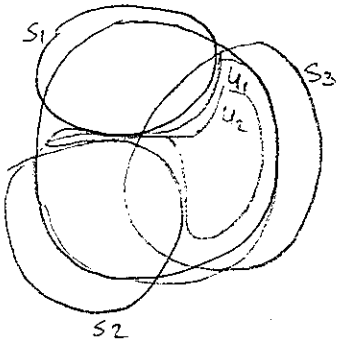
כל קבוצה ניתן לחסום ע"י k חתכי קבוצות. לכן, עבור m בחירה, לפחות $\frac{1}{k}$ מאלו שנותרו מכסים (כי יש לנו k קבוצות ואנו בוחרים את הקבוצה שנבחרה מספר מקסימלי איברים שנותרו).

אחרי $k \cdot \log m$ צעדים האלגוריתם מכסה לפחות $\frac{1}{2}$ מהמלמלים.
(מספיק שלאחר שנבחר את הצב חוזר, נוכל לשר שהקרבה היא לרמה של $\log m$)

סבוכיות - שיעור 10



הערה: אפשר לחלק ל k זוויות בשלב ב' ושים לב שבכל שלב אינו מכפיל בחצי המעגלים. זוית שנמצאת במרכז בשלב הראשון לא שונתה אינו יותר מ- $\frac{\pi}{2}$ המעגלים. בשלב זה אינו מכפיל $\frac{\pi}{2k}$ המעגלים. אינו מבדלים א שבים ואז הזוית כי אינו מכפיל $\frac{\pi}{2k} \cdot k = \frac{\pi}{2}$ המעגלים.



הוכחה לבור n גדול:

בכל שלב נסמן את הקבוצה שבחרנו כ- S_i. ואת הנותרים כ- u_i. בכל שלב $|u_{i+1}| = |u_i - S_{i+1}| \le |u_i|(1-\frac{1}{k})$ והמסקנה היא שלאחר בכל שלב i יהיו בעיקר כלומר

$$|u_{ik}| \le |u_0|(1-\frac{1}{k})^{ik} \underset{u_0=U}{\le} |U|e^{-i}$$

$(1-\frac{1}{k})^{ik} \to (\frac{1}{e})^i$ (שיעור טלמור).

כלומר n גדול $= i$ ואם כי $n = e^{-i}$ (ואז נשאר רק אחד אחד אותו נכסה בדרך הבא).

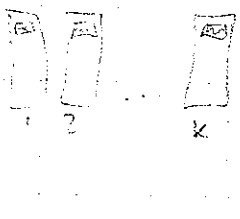
חסם טוב יותר - נזכר כי המספר ההרמוני $H(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{i} = \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i} + 1$.

נחשב את מספר הקבוצות הבנוי. בכל שלב נמיר את המעגלים הרבעים בגודל של $\frac{1}{i}$ כאשר i זה גם הקבוצה שאנו בוחרים.

זוית ולכן בחלק הקבוצה מסוימת אלא בחרנו הקבוצה אחרת. אבל כל אחד שנכנס ישלם עלות הוא i חלק שבו הקבוצה שנבחר (כי אחרת היו בחרים בו).

זוית והיינו יודעים מהי החלקה הטובה ביותר. נסתכל על הקבוצה הבאה ביותר בחלוקה כזו. נשים לב שחסם עליון הכי הוא מספר "הקבוצה" שעולמו בפתרון האופטימלי בחסם לתשלום של החלוקה באלגוריתם החמדני.

נשים לב שהסכום של האלגוריתם החמדן הוא בסך הכל "מעגלים" שמו (כמו סה"כ התשלום של כל "מעגלים" - משוכת החיים).



זוית שהפתרון האופטימלי הוא k. ניתן אם כך לחלק את הסטודנטים ל- k חדרים. (לפי את האלגוריתם החמדן) ועל משתמש שקבוצה בשמו ושים את הבחור הנדרש על שולחן בכיתה ויגע. הכל כמה הסכום שיצטרך לזה לכל היותר $H(k)$ וסה"כ (הכל) שהסכום הוא $k \cdot H(k)$.

Approximation

בעיית הבעיה - בעיין המחלקות את הקשתות ל-3 קבוצות: טובים (מקלים), רעים (נדרשים) ולכן שלא משנה. (don't care).

למשל - הוא קיומן הקבה שמבטיח 80% מההסברים של 3SAT בהנחה שזוהי לפחות 80%.

את הבעיה נחלק ל-3: טובים - הקשתות שנמצאו לפחות מעל 90%, לא משנה - כלומר שלא נמצא לפחות אחוז 80 ורעים - כלומר שנמצאו לפחות בין 80% ל-90% מהסברים.

GA[c,h] מבוא מינימלי הוא בעיה שמקבלת את הקשתות הקשורות מ- c, כולה עבור הקשתות הבודדות מ- h ולכל קשתות בתוך הקשת - לא משנה מה נחליט.

סיבוכיות - שיעור 10

רוצים להבין את הקושי של בעיית הקירוב. בשביל שזה נבלם לפתור בעיה בקירוב מספיק אינ נקבל לא שלם כי P=NP.

אבחנה: כדי לפתור את בעיית Gap, נסתכל על הפרמטר ונחבל לבדוק כאלו הקטנים מ-אחד, בהגדרה כן, אנו שומרים את הגדרים של Gap (לפי הסתברויות של קיבוץ טיבים/רעים).

הם אינ מקיים הבעיות לבעיית הקירוב שה בהתאמה היא הרים בין הכל הגיין לתחתון.

הגדרה: (*) $GAP\text{-}VC[\frac{2}{3},\frac{8}{9}]$ - בא כי VC שגל מ-$\frac{8}{9}$ הוא הכי רע, בא כי VC הכי מ-$\frac{2}{3}$ הוא טוב ובאמצע לא משנה.

(*) אם נוכל לחבאר בעיה שפתרת עד הרוב של ההבדלים בין הכל הגדול לתחתון, נוכל לפתור את בעיית הה GAP ואז אם בעיית ה-Gap הוא קשה, אז גם בעיית הקירוב הוא קשה.

(*) Gap-3SAT מוגדרת עם הסבים $[1,\ \frac{7}{8}+\varepsilon]$ כאשר הפרמטר הוא אז ההסבים שנתן לספק. הסבה ל-ε הוא שבלשהו כן כמעט בעיה טרחנית.

ב נשים לב שבעיית GAP הוא בעיה יותר הלא: אבל שהל הוא יחיד, הן מגיין מעניינת כיון שזה נראה שזו בעיה NP קשה. הבעיה לבד משאלת תצקה ליתר. *

8/7: נגדיר מ"מ y_i שהוא 0 אם בהגדרה שהתקבל הוא לא מסתפק ו-1 אם כן. התוחלת של y_i הוא $7/8$ כיון שכל משתנה לא מספק בסיכוי $\frac{1}{8}$ וכדי שלא יספק לא יסתפק קיים סיכוי $\frac{7}{8}$. לכן התוחלת הוא $\frac{7}{8}$. מכון שתוחלת הסכום הוא $\frac{7}{8}\cdot m$ (כאשר m הוא מספר הסבים) ברור לגמרי שקיימת הגבה שמספרת לפחות $\frac{7}{8}$ מסבים אין מקי המינימום אולי. אבל יש מעלה מסוים קיים אי אפשר לפחות שבדל מהמינימום.

משפט ה-PCP: לכל סדר הבעיה Gap-3SAT$[\frac{7}{8}+\varepsilon,1]$ הוא בעיה NP-קשה.

אנחנו רוצים להראות כל דרך הבעיה לבתוך הבעיה. לאחר מכן הבדר בדרך המסויימת, כדי לבדוק הקיים הנמוכים בהבדה (מספרם הוא כדים להבדה הנשלמה) כדי שאם ההוכחה נכונה בעיה נקבל ואם לא שקרית ואז סיכוי מאיד קטן שיקבל עדיין אינו.

נתרגם את ההבדה לנוסחת CNF-3 ונבחר פסוקית הנוסחת אם סיר לבדבה הסיכוי שנבחר פסוקית שבטוחה הפסק הוא $\frac{7}{8}+\varepsilon$ לכן הסיכוי שנבחר הפסוקית בטוחה הוא $(\frac{7}{8}+\varepsilon)^m$ כאשר m הוא מספר הפסוקיות.