סמסטר אי תשס"ה. מועד ב'
תאריך הבחינה: 04.03.2005

מבחן באלגברה לינארית 1
שם המרצה: פרופ' אלסקר סמיון
שם המתרגלים: אסף הדרי, קובי קרמניצר

יש לענות על כל השאלות. אין להשתמש בשום חומר עזר פרט למחשבונים.
משך הבחינה: 3.5 שעות.
בשאלות 1-4 יש לכתוב את התשובות הסופיות בלבד בעמוד הראשון של המחברת.
בשאלה 5 יש לכתוב את החוכחות המלאות בדפים 2-4 של המחברת.

שאלה 1.

(11) (א) נתונה מערכת משוואות $Ax=0$ כאשר A היא מטריצה ממשית מסדר $m\times n$.
נסמן $C(A),R(A),V$ מרחב הפתרונות, $span$ של השורות ו- $span$ של העמודות בהתאמה.
אילו מהטענות הבאות נכונות (יש לסמן את כל התשובות הנכונות):

a. אם $m=n$ אזי $C(A)=R(A)$

b. $\dim R(A)+\dim V=n$

c. $\dim C(A)=\dim R(A)$

(11) (ב) יהי V מרחב של מטריצות ממשיות מסדר 2×2. תהי W_1 תת-מרחב המטריצות מהצורה $\begin{pmatrix} x & -2x \\ y & z \end{pmatrix}$ ותהי W_2 תת-מרחב המטריצות מהצורה $\begin{pmatrix} 2a & b \\ -a & c \end{pmatrix}$, כאשר $x,y,z,a,b,c\in\mathbb{R}$.
אילו מהטענות הבאות נכונות (יש לסמן את כל התשובות הנכונות):

a. קיים איזומורפיזם של V לעצמו שמעביר W_1 ל W_2

b. $W_1\oplus W_2=V$

c. $W_1+W_2=V$

שאלה 2.

(10) (א) עבור מטריצות $A_{n\times n}$, $a_{i,j}\in\mathbb{C}$
אילו מהטענות הבאות נכונות (יש לסמן את כל התשובות הנכונות):

a. $A^2=I \Rightarrow A=I$ או $A=-I$

b. קיימת A שאיננה אלכסונית כך ש: $A^2=I$ ובנוסף $tr(A)=0$

(12) (ב) יהי V מ"ו. איזה מהטענות הבאות נכונה (יש לסמן את כל התשובות הנכונות):

a. יהיו $u,v,w\in V$ וקטורים. אם כל הזוגות $\{u,v\},\{u,w\},\{v,w\}$ בת"ל אזי גם השלישיה $\{u,v,w\}$ היא בת"ל.

b. יהיו $u,v,w\in V$ וקטורים. אם $\{u,v,w\}$ בת"ל אזי $\{u+v+w,u+2v,u-w\}$ גם בת"ל.

שאלה 3.

(12) (א) יהיו A,B תתי-קבוצות של מ"ו V. איזה מהטענות הבאות נכונות (יש לסמן את כל התשובות הנכונות):

a. $span(A\cup B)=span(A)+span(B)$.

b. $span(A\cap B)=span(A)\cap span(B)$.

A-68

$\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$

$\xleftarrow{\quad}$

$$\begin{array}{cccc} a & b & c & d \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}$$

$A_{m\times n}$

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{matrix}$$

$$a\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}+d\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

$\dim V = n-k+k=n$

$$\begin{bmatrix}1&0&-1&0\\0&1&0&-1\\0&1&-1&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-1&0\\0&1&0&-1\\0&0&-1&1\end{bmatrix}$$

$$a\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a\\b\\2a\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}x\\y+y\\z+y\end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix}2&0&-1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\1&-2&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{matrix}$$

$|A||A|=1$

$|A|=\pm 1$

$a=d$

$b=d$

$c=d$

$a=c$

$A^2+\operatorname{tr}(A)A+\det(A)I=0$

$I+0\cdot A=-\det(A)I$

$\det A=(-1)$

$\alpha(u+v+w)+\beta(u+2v)+\gamma(u-w)=(\alpha+\beta+\gamma)u+$

$+(\alpha+2\beta)v+(\alpha-\gamma)w=0$

$$\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&0\\1&0&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&-1\\0&0&-2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&-1\\0&0&-3\end{bmatrix}$$

LAVIV UNIVERSITY אוניברסיטת תל-אביב

הוראות לנבחנים ולנבחנות (נבחנו בלשון הכר אך נזכרו כשם
לפני התחלת הבחינה מלא את כל הסרטים הבאים בכתב ברור וקרא

תאריך הבחינה 4/3/05

שם הקורס גלובליזציה 1

שם המורה ד"ר מיכל גלבר

הרוב/מגמה בינלאומיות

1. הנך מרשם לשכור על מ
ולהשתמש להוראות המשנ
לחעתיק, אין לצבר נתון

נבחן המשתמש בחומר ל
מלהשתמש לרק מאושרת

2. על הנבחן לנבחן בחדר

3. אין להחזיק מלפונים נייד
אלקטרוניים כלשהם בכ
כל הפצירו הנייחים בנמ

4. אין להחזיק בהישג יד, ג
חומר הקשור לבחינה א
בו הוחר בכתב על ידי ה

5. קריאת הנשאלון מחרת ר

6. הנבחן לא יחזיר את מקו
סיים את הבחינה ללא קו
בין החדר, יפקיד הנבחן
(מסמכי הבחינה) בידי ה

7. נבחן שנכנס לחדר חכ
יוצא רשאי לעבוב מהמקום
תחילתה ורק לאחר פני
הנשאלון, ויקבל מסמכי ב
עם כניסתו לבחינה. נבח
הבחינה יחשב כמי ש

8. אין לכתוב את השמו
המתבקש, פרטי הנבחן
המיועד לכך בלבד.

9. אין לחלוש דפים מחומר
בלבד. אין להשתמש ב

10. יש לכתוב את המשוב

לשימוש חמורה הבוחן:

הציון 100

המחברת נבדקה ביום 10.03.05

חתימת המורה [illegible]

73449 .

1.C1.C

$(x+a_1)d_{n-1} = d_0$

$(x+a_2)\, d_{n-2} = d_{n-1}$

$d_n = (x+a_1)(x+a_2)d_{n-2} = \dots = (x+a_{i\,n-2})d_2$

$(x-a_0)d_{n-1}$

$d_n = (x-a_{i\,n-2})d_2 = (x-a_{i\,n-1})(a_0 x - a_0 a_1)$

$= a_0(x-a_i)$

$n-k+k=n$

$$\begin{matrix} 1 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{matrix}$$

$(A)_{ji} = (A^t)_{ij} = (-A)_{ij}$

$A^t = -A$

$A^t = -A \qquad B^t = -B$

$(AB)^t = B^t A^t = (-B)(-A) = BA$

$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} =$

$(AB)_{ij} = \sum_k (A)_{ik}(B)_{kj}$

$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \\ -3 & -4 & 0 \end{bmatrix}}_{B} = (AB)_{ji} = \sum_k (A)_{jk}(B)_{ki}$

$= \sum_k (-A)_{kj}(-B)_{ik}$

$= \sum_k (-B)_{ik}(-A)_{kj}$

$= \sum_k B_{ik}A_{kj}$

$(AB)_{1,3}$ $\boxed{}$

$\neq$

$(B\,A)_{1,3}$ $\boxed{}$

$\neq$

$AB^t_{1,3} \qquad (AB^t)_{1,3} \neq (AB)_{1,3}$

תשובה ו—

ל) (א) $n \in \mathbb{N}$ בת $e^{x}, e^{2x}, \dots, e^{nx}$ בת"ל

הוכחה:

תחילה נזכר בנוסחא שנראה:

$$(e^{ax})' = a e^{ax}$$

בסתירה לתכונה הבינארית כי $\{e^{jx}\}_{j=1}^{n}$ בת"ל

אם כן, עבור $n=1$

$\{e^{jx}\}_{j=1}^{n}$ בת"ל. נניח: $a e^{x} = 0$

אזי $a \neq 0$ $\Leftarrow$ $e^{x} = \frac{0}{a} = 0$ וזו סתירה,

(שכן $e^{x} \neq 0$)

$\Leftarrow a = 0 \Leftarrow$ הגדרת הבלתי תלוי לינארי.

$\Leftarrow \{e^{x}\}$ בת"ל.

כעת נניח שהוכחנו עבור $\{e^{jx}\}_{j=1}^{n}$ כי הם בת"ל

ונראה עבור $\{e^{jx}\}_{j=1}^{n+1}$.

אם כן נניח כי יש לנו צירוף לינארי מתאפס

$$(*) \quad \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j e^{jx} = 0$$

כאשר λ_j לא כולם מתאפסים. (לא צריך גם אז אינה שקר הבינארית $\{e^{jx}\}$ מוגדרת אבל זה לא נשנה את מהלך ההוכחה)

אם כן נגזור עפ"י כללים סטנדרטיים של גזירה

$$= \quad = \quad = \quad 0 = 0' = \left(\sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j e^{jx}\right)' = \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j (e^{jx})' =$$

גזירה היא פעולה לינארית:

$(f+g)' = f' + g'$

$(cf)' = c f'$

5) ג) $T: M_n(\mathbb{F}) \to M_n(\mathbb{F})$, $A \in M_n(\mathbb{F})$, $T(x) = Ax - xA$

<u>נדרש:</u> T אינו חח"ע.

<u>הוכחה:</u>

$$T(I) = AI - IA = A - A = 0$$

$$\Rightarrow I \in \ker(T) \Rightarrow \ker(T) \neq \{0\}$$

$\underset{\text{משפט}}{\Longrightarrow}$ אינו חח"ע T $\underset{\text{משפט}}{\Longrightarrow}$ אינו חח"ע T

T חח"ע $\Leftrightarrow \ker(T) = \{0\}$

$T: V \to W$

$\dim V = \dim W$

~~[illegible]~~ T חח"ע $\Leftrightarrow$ T ע"ח

~~[illegible]~~ נגדיר: $V = W = M_n(\mathbb{F})$

$\dim W = \dim V = \dim M_n(\mathbb{F})$: אז

12/12

$-1+3 \quad -2$

$$\begin{matrix} 1-\lambda & 1 & 1 & \lambda^2+3\lambda \\ 1 & 1+\lambda & 1 & \lambda^3+3\lambda^2 \\ 1 & 1 & 1+\lambda & \lambda^4+3\lambda^3 \end{matrix}$$

$AA^{-1} = I$

$(A^t)(A^{-1})^t = I$

$9+3(-2 \quad -27+27 \quad 81+3(-27)$

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{matrix}$$

$(A^{-1})^t A^t = I$

$(-A)$

$$\begin{matrix} 0 & -3 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} 0 & -3 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

$x_2 = x_3 \quad 1$

$x_1 = x_3 \quad -1$

A

$1+3$

$$\left[\begin{matrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} -2 \\ 2 \\ -2 \end{matrix}\right] \to \left[\begin{matrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} -2 \\ 2 \\ -4 \end{matrix}\right] \to \left[\begin{matrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} -2 \\ 2 \\ -2 \end{matrix}\right]$$

$$\left[\begin{matrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{matrix}\right] \to \left[\begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{matrix}\right]$$

$9+3(-3)$

$-27+39 = 0$

$81+3(-27) = 0$

$\sum \lambda_i e^{x} = 0$

$x_1 = 1$

$x_2 = -3$

$x_3 = 1$

$a_1 e^{x} + a_2 e^{2x} + \dots + a_n e^{nx} = 0$

$$\left[\begin{matrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}\right]$$

$a_1 e^{x} + 2a_2 e^{2x} + \dots + a_n \cdot n\, e^{nx} = 0$

$$\left[\begin{matrix} 0 & -3 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}\right]$$

$n a_1 e^{x} + n a_2 e^{2x} + \dots + n a_n e^{nx} = 0$

$(x a_1 - a_1) e^{x} + \dots + (x a_{n-1} - (n-1) a_{n-1}) e^{(n-1)x} = 0$

$$\left[\begin{matrix} 0 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}\right]$$

$x a_1 (x-1) \qquad a_{n-1}(1) e^{n-1} e$

$2a e^{x} + 2a e^{2x} = 0$

$a e^{x} + 2b e^{2x} = 0$

$(a - 2a) e^{x} = 0$

$-a e^{x} = 0$

$x_2 = x_3$

$x = 2x_2 - x_3$

$= 2x_3 - x_3 = x_3$

1(C)·C

1 2
0 0
A B $A \cap B = \emptyset$ span A = span B

$\mathrm{span}(A \cup B)$

$$\underbrace{\sum \lambda_i a_i}_{\mathrm{sp}A} + \underbrace{\sum \delta_j b_j}_{\mathrm{sp}B} \subseteq$$

$$\supseteq$$

$$\sum \lambda_i a_i + \sum \delta_j b_j$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_0 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_0 & x & a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & & x & & \\ a_0 & & & \cdots & a_{n-1}\ x \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

$$-a_1 \begin{vmatrix} a_0 & a_2 & & a_n \\ \vdots & x & & \\ & a_2 & & \\ \vdots & & & \\ a_0 & a_2 & & a_{n-1}\ x \end{vmatrix} + x \underbrace{\begin{vmatrix} a_0 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_0 & x & \cdots & a_n \\ \vdots & a_2 & \ddots & \\ \vdots & & & \\ a_0 & a_2 & a_{n-1} & x \end{vmatrix}}_{\text{לא צריך לדעת!}}$$

$$+ a_1 \begin{vmatrix} a_0 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_0 & a_2 & \cdots & a_n \\ & & & \end{vmatrix} +$$

rc 01.C

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & & & \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 3/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & -1/2 & 0 \\ 1 & -1/3 & 0 & 0 & 0 & -1/3 \end{array}\right)$$

$$\to \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 3/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & -1/3 & 2 & 0 & 1/2 & -1/3 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 3/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -3/2 & 0 & -3/8 & 1/4 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 3/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -1/2 & -3/8 & 1/4 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 3/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/6 & 1/8 & -1/12 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 0 & -1/4 & -3/16 & 1/8 \\ 1 & 0 & 0 & 1/3 & -1/4 & -1/6 \\ 0 & 0 & 1 & 1/6 & 1/8 & -1/12 \end{array}$$

$-\frac{3}{2}\cdot 1$

$-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2} = -\frac{3}{4}$

$+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}$

$-\frac{3}{4}\cdot 2 - \frac{3}{2}$

$\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{6}$ $\quad \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}$

$= \frac{6}{12} - \frac{3}{12}$ $\quad \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$ $\quad = \frac{1}{2} - \frac{3}{4}$

$-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{8} = -\frac{3}{16}$ $\quad = -\frac{1}{4}$

$-\frac{3}{2} + \frac{1}{12}$ $\quad \frac{3}{24}$

$\frac{1}{2}$ $\quad \frac{1}{8}$ +

1

$$\begin{bmatrix} 1 & -1/4 & -1/6 \\ -1/4 & -3/16 & 1/8 \\ 1/6 & 1/8 & -1/12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \\ -3 & -4 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$(A)_{ij} = -(A)_{ji}$$

$$AA^{-1} = \mathbb{1} \qquad (AA^{-1})_{ii} = \sum_k (A)_{ik}(A^{-1})_{ki} = 1$$

$$(A^{-1}A)_{ii} = \sum_k (A^{-1})_{ik}(A)_{ki} = 1$$

$$\sum_k (A^{-1})_{ik}\underbrace{\left(-(A)_{ik}\right)}_{-(A^{-1})_{ki}} = 1$$

$$(A^T A)_{ij} = \sum_k (A^T)_{ik} (A)_{kj} = \sum_k A_{ki} (A)_{kj}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$i=j$

$$\Rightarrow \sum_k A_{ki} A_{ki} =$$

$$\boxed{A_{ki} = 0}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

$AA^{-1} = I$

$(A)A^{-1})$

$$(AA^{-1})_{ij} = \sum_k (A)_{ik} (A^{-1})_{kj}$$

$i=j$

$$\sum_{i \neq j} A_{ik} (A^{-1})_{ki} = 1$$

$$(A \cdot A^{-1})_{ij}$$

$$(A^{-1} A)_{ij} = \sum_k (A^{-1})_{ik} (A)_{kj} \quad : \quad \sum (A^{-1})_{ik} (A)_{ki} = 1$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 6 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 1 & 0 & -3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right] \to \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 0 & 1/2 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{6} \\ 1 & 0 & -3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1/2 & -\frac{1}{3} & -1/6 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 0 & 1/2 & -1/3 & -1/6 \\ 1 & 0 & -3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/4 & 1/6 & 1/12 \end{array} \qquad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1/2 & -1/3 & -1/6 \\ 1 & 0 & 0 & 3/4 & -1/2 & 3/12 \\ 0 & 0 & 1 & 1/4 & 1/6 & 1/12 \end{array}\right]$$

$\cancel{1/2 \cdot 1/6 \cdot 1/12}$

$$\begin{pmatrix} 3/4 & -1/2 & 3/12 \\ 1/2 & -1/3 & -1/6 \\ 1/4 & 1/6 & 1/12 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & cb + d^2 \end{array} \quad 0$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

$i + d = 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & & & \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} i & 2 \\ 1 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i & 2 \\ 1 & -i \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \to \cancel{\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & & & \end{array}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(c) (1) (4) ?

(b) (2) ?

$$\begin{bmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{array}$$

$\alpha + \beta + \gamma$

$\alpha \quad 2\beta$

$\alpha \quad -\gamma$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} & \\ 1/a & \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{matrix}$$

$\frac{3}{4} \cdot 2 = \frac{3}{2}$

$$\left(\begin{matrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \\ -3 & -4 & 0 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right)$$

$$\left(\begin{matrix} 0 & 1 & 3/2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 4/3 & 0 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 \end{matrix}\right)$$

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 3/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 4/3 & 2 & 0 & 1/2 & -1/3 \end{matrix}$$

$-\frac{1}{3} - \frac{5}{3}$

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 3/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 3/2 & & & \end{matrix}$$

$\frac{5}{2} - 1 \cdot \frac{5}{2}$

$\frac{26}{3}$

$\frac{5}{2} \cdot \frac{1}{3}$

$$\left(\begin{matrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 & 4 \\ -1 & -3 & 0 & 5 \\ -2 & -4 & -5 & 0 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{matrix}\right) \qquad \begin{matrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & -4 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & -5 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 5/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/2 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & -4 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1/2 & 4 & 0 & 1 & 0 & -1/2 \end{matrix} \qquad \left(\begin{matrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & -1/3 \\ 0 & 1 & 1/4 & 2 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & -1/4 \end{matrix}\right)$$

$$\left(\begin{matrix} \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ 0 & 0 & 3/4 & 7/3 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ 0 & 1/6 & 1/3 & -1/4 \end{matrix}\right) \qquad \left(\begin{matrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -7/3 \\ 0 & 0 & 1 & 4/3 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 3/4 & 1/4 & -1/4 \end{matrix}\right)$$

$$AB_{ij} = \sum_k A_{ik} B_{kj}$$

$$(AB)_{ji} = \sum_k A_{jk} B_{ki}$$

$$(BA)_{ji} = \sum_k B_{jk} \cdot A_{ki} = \sum_k B_{kj} A_{ik} = (AB)_{ij}$$

$$(BA)_{ji} = (AB)_{ij} = (AB) \quad \Rightarrow$$

$$(AB)_{ij} = (AB)_{ji} \qquad (AB)_{ij} = (BA)_{ji}$$

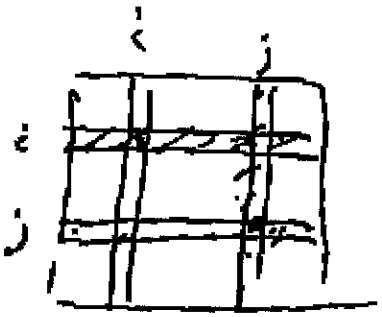
$$AB = BA^t$$

$$AB = (AB)^t = B^t A^t = BA$$

$$\underbrace{AA^{-1}}_{IA^{-1}}A^{-1} = A(A^{-1})^2$$

$$\begin{matrix} 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$$



$$A \operatorname{adj} A = |A| I$$

$$A^{-1} = \frac{\operatorname{adj} A}{|A|}$$

$$(\operatorname{adj} A)_{ij} = (-1)^{i+j} |M_{ji}|$$

$$(\operatorname{adj} A)_{ji} = (-1)^{i+j} |M_{ij}|$$

$$M_{ij} = M_{ji}^{T}$$

A	B	C	D
-B	0	E	F
-C	-E	0	G
-D	-F	-G	0

$$\begin{matrix} 0 & B & C & D \\ B & 0 & G & H \\ C & G & 0 & I \\ D & H & I & 0 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} A & B & D \\ -B & 0 & \end{matrix}$$

$(M_{ij})_i$

$(M)_{ij}$

$$\begin{matrix} A & B & C & D \\ \frac{c}{a} & -\frac{b}{c} & -\frac{b}{ac} & \frac{c^2-b^2}{ac} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 0 & B & C \\ -B & 0 & G \\ -D & H & I \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \end{matrix}$$

$$\left(\begin{matrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right)$$

$a \neq 0$

$$\left(\begin{matrix} 0 & 1 & \frac{b}{a} \\ 1 & 0 & -\frac{c}{a} \\ 0 & \frac{b}{c} & \frac{c}{a} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{b} \end{matrix}\right) \qquad \left(\begin{matrix} 0 & 1 & \frac{b}{a} \\ 1 & 0 & -\frac{c}{a} \\ 0 & 0 & \frac{c^2-b^2}{ac} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a} & 0 \\ -\frac{1}{ac} & -\frac{1}{a} & -\frac{1}{b} \end{matrix}\right)$$

$$\frac{n-1}{1} \quad 3 \qquad 1 = b, a \quad c = 2$$

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -1 & -1 \end{matrix} \qquad \left(\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{matrix}\right)$$

שאלה 2 סעיף א'

נתון: V ו $\{v_1, v_2, v_3\}$ בת"ל. צ"ל:

$\{v_1+v_2,\ v_2-v_3,\ v_1+v_2+2v_3\}$ בת"ל

נניח כי:

$$\lambda_1(v_1+v_2)+\lambda_2(v_2-v_3)+\lambda_3(v_1+v_2+2v_3)=0$$

צריך להוכיח כי מכאן נובע $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$

$$\lambda_1(v_1+v_2)+\lambda_2(v_2-v_3)+\lambda_3(v_1+v_2+2v_3)=$$

$$(\lambda_1+\lambda_3)v_1+(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)v_2+(-\lambda_2+2\lambda_3)v_3=0$$

שאנחנו יודעים כי $\{v_1, v_2, v_3\}$ בת"ל נובע כי המקדמים בשוויון הנ"ל:

$$\begin{cases}\lambda_1+\lambda_3=0\\ \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0\\ -\lambda_2+2\lambda_3=0\end{cases}$$

* נראה כי לבע"ל לא יכול להיות אי־יחיד (כלומר $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$)

שלושת המקדמים בטריאנגולרית לכן:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&0\\1&1&1&0\\0&-1&2&0\end{array}\right)\xrightarrow{R_2\leftarrow R_2-R_1}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&0\\0&1&0&0\\0&-1&2&0\end{array}\right)\xrightarrow{R_3\leftarrow R_3+R_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&2&0\end{array}\right)\xrightarrow{R_3\leftarrow R_3\cdot\frac{1}{2}}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{array}\right)\xrightarrow{R_1\leftarrow R_1-R_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{array}\right)$$

לכן $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$

בת"ל

$\frac{11}{11}$

שאלה מס' 1:

אז 9/11

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = a \\ x_1 + x_2 + x_3 = b \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = c \end{cases} \qquad a, b, c \in \mathbb{C}$$

מטריצה המקדמים המתאימה למערכת זו היא:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 & b \\ 3 & 1 & 1 & c \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \leftarrow R_3 - 3R_2]{R_1 \leftarrow R_1 - 2R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & -1 & a-2b \\ 1 & 1 & 1 & b \\ 0 & -2 & -2 & c-3b \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_3 \leftarrow R_3 - 2R_1]{R_2 \leftarrow R_2 + R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & -1 & a-2b \\ 1 & 0 & 0 & \cancel{2a-3b} \\ 0 & 0 & 0 & c+b-2a \end{array}\right)$$

טעות אישית

-2

$$\xrightarrow{R_1 \leftarrow R_1 \cdot (-1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 2b-a \\ 1 & 0 & 0 & 2a-3b \\ 0 & 0 & 0 & c+b-2a \end{array}\right)$$

עבור כל הבחירות בהן $c+b-2a \neq 0$ למערכת אין פתרונות. כלומר, למשל יש פתרונות אם $c+b+2a \neq 0$

הפתרונות: $x_3 = t$ $\quad x_2 = 2b-a-t$ $\quad x_1 = 2a-3b$

$a = k + k'i \quad b = j + j'i \quad t = y + y'i$

בשביל מה כל זה?

$x_1 = (2k-3j) + (2k'-3j')i$

$x_2 = (2j-k-y) + (2j'-k'-y')i$

$x_3 = y + y'i$

$y + y'i + (-j+2k) + (-j'+2k')i$

(מ) יהי $S = \text{span}\{(1,2,0,1),\ (1,1,1,0)\} \subseteq \mathbb{R}^4$

ו $T = \text{span}\{(1,0,1,0),\ (1,3,0,1)\} \subset \mathbb{R}^4$.

מצאו בסיס ב- $(S \cap T)$ ו- $(S+T)$.

---

(4)

(ו) (א) יהי $L \subset \mathbb{R}[x]_n$ תת-מרחב לינארי של מרחב הפולינומים המתאימים מדרגה אי-זוגית. נניח כי L מכיל לפחות פולינום אחד מדרגה k בשביל כל $k=0,1,\dots,n$. הוכיחו כי $L=\mathbb{R}[x]_n$.

(ו) (ב) הוכיחו כי

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 5 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & \dots & 2 & 5 \end{vmatrix} = \frac{1}{3}\left(4^{n+1}-1\right).$$

---

(5)

(ו) (א) מטריצה A נקראת סימטרית אם $A^t=A$, ו- A נקראת אנטי-סימטרית אם $A^t=-A$. הוכיחו כי המרחב $M_n(F)$, $\text{char}F \neq 2$, הוא סכום ישר של תת-המרחבים של מטריצות סימטריות ואנטי-סימטריות.

(ו) (ב) תהי $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ המקיימת $tr(AA^t)=0$. הוכיחו כי $A=0$.

בהצלחה!