A-67

סמסטר א' תשס"ה. מועד א'

תאריך הבחינה: 01.02.2005

מבחן באלגברה לינארית 1

שם המרצה: פרופ' אלסקר סמיון

שם המתרגלים: אסף הדרי, קובי קרמניצר

יש לענות על כל השאלות. אין להשתמש בשום חומר עזר פרט למחשבונים.

משך הבחינה: 3.5 שעות.

בשאלות 1-4 יש לכתוב את התשובות הסופיות בלבד בעמוד הראשון של המחברת.

בשאלה 5 יש לכתוב את ההוכחות המלאות בדפים 2-4 של המחברת.

שאלה 1.

(11) (א) לחשב את דרגת המטריצה עבור כל פרמטר λ ממשי:

$$A=\begin{bmatrix} 7-\lambda & -12 & 6 \\ 10 & -19-\lambda & 10 \\ 12 & -24 & 13-\lambda \end{bmatrix}.$$

בחרו אחת מהתשובות הבאות:

(a) $rkA=3$ לכל λ. (b) $rkA=\begin{cases} 3, \lambda \neq 1,5,-5 \\ 2, \lambda = 1 \\ 1, \lambda = 5,-5 \end{cases}$. (c) $rkA=\begin{cases} 3, \lambda \neq 1,5,-5 \\ 2, \lambda = 1,5,-5 \end{cases}$.

(11)(ב) לפטור את המערכת

$$\begin{cases} x_1+2x_2+\ldots+nx_n=b_1 \\ 2x_1+3x_2+\ldots(n+1)x_n=b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ nx_1+(n+1)x_2+\ldots+(2n-1)=b_n \end{cases}.$$

בחרו אחת מהתשובות הבאות:

(a) אם קיימים $2 \le i, j \le n$ כך ש- $b_i-b_{i-1} \neq b_j-b_{j-1}$ אז אין פתרון. אחרת

$$\begin{cases} x_1=(2b_2-3b_1)+\sum_{i=3}^{n}(i-2)x_i \\ x_2=(2b_1-b_2)-\sum_{i=3}^{n}(i-1)x_i \end{cases}$$

כאשר $x_3,\ldots,x_n$ מספרים כלשהם.

(b) אם קיימים $2 \le i, j \le n$ כך ש- $b_i-b_{i-1} \neq b_j-b_{j-1}$ אז אין פתרון. אחרת

$$\begin{cases} x_1=(2b_2-3b_1)-\sum_{i=3}^{n}(i-2)x_i \\ x_2=(2b_1-b_2)+\sum_{i=3}^{n}(i-1)x_i \end{cases}$$

כאשר $x_3,\ldots,x_n$ מספרים כלשהם.

(c) $x_i=ib_i-(i-1)$ לכל $1 \le i \le n$.

שאלה 2.

(11)(א) יהי U,V,W תתי-מרחבים לינאריים של מ"ו L נוצר סופית. אילו מהטענות הבאות נכונות:

(1) $(U+V)\cap W=(U\cap W)+(V\cap W)$. (2) $(U\cap V)^*=U^*+V^*$.

בחרו אחת מהתשובות הבאות:

(a) (1). (b) (2). (c) שתיהן נכונות. (d) שתיהן לא נכונות.

10/10

שאלה 5.

ב. $adj(adj(adjA)) = (\det A)^{(n-1)(n-2)} \cdot adjA$. הוכח

נשתמש בנוסחא שמוכרת בכיתה:

$$A \cdot adjA = I \cdot \det A$$

$$adjA = (\det A) A^{-1}$$ בהנחה ש- A הפיכה

נשים לב ש:

$$\begin{cases} adj(adjA) = \det(adjA)(adjA)^{-1} = \\ \det((\det A)\cdot A^{-1})\cdot((\det A)A^{-1})^{-1} = (\det A)^{n} \cdot \det(A^{-1}) \cdot \frac{1}{\det A} \cdot A = \end{cases}$$

הערה 1 (1) (2)

$$(\det A)^{n} \cdot \frac{1}{\det A} \cdot \frac{1}{\det A} \cdot A = (\det A)^{n-2} \cdot A$$

$$adj(adj(adjA)) = adj((\det A)^{n-2} \cdot A) = \det((\det A)^{n-2} \cdot A) \cdot ((\det A)^{n-2} \cdot A)^{-1}$$

$$((\det A)^{n-2})^{n} \cdot \det A \cdot \frac{1}{(\det A)^{n-2}} \cdot A^{-1} = (\det A)^{(n-2)n} \frac{\det A}{(\det A)^{n-2}} \cdot \frac{AdjA}{\det A} =$$

$$(\det A)^{(n-2)n-(n-2)} \cdot AdjA = (\det A)^{(n-2)(n-1)} \cdot AdjA$$ נשים לב:

הסברים:

(1) $\det(\lambda A) = \lambda^{n} \det A$ מתמטיקה לתכונות הדטרמיננטה ניתן את

מכלל מנוגד. (2) $\lambda \neq 0$ אם מטריצה כלשהי כל הפרמטרים

$$A^{-1} \cdot I \cdot \frac{1}{\lambda} = A^{-1}(I\lambda)^{-1} = (I\lambda A)^{-1} = (\lambda A)^{-1} \quad (2)$$

שאלה 5.

(12)(א) יהיו V,W מ"ו נוצרים סופית. תהיינה $f,g:V\to W$ טייל. הוכיחו כי אם $Ker(f)\subset Ker(g)$ אזי קיימת טייל $h:W\to W$ כך ש- $h\circ f=g$.

(10)(ב) תהי $A\in M_n(\mathbb{F})$ מטריצה הפיכה. הוכיחו כי $adj(adj(adj(A)))=(\det A)^{(n-2)(n-1)}adj(A)$.

בהצלחה!!!

שאלה 5: 12/12

(ב) V, W מ"ו נתונים סופית. הוכח כי קיים $h: V \to W$ כך שמתקיים $f \circ h = g$.

נבחר בסיס ל $\ker f$ נניח $\dim \ker f = m$, $\dim V = n$

אם $B_{\ker f} = e_1, \dots, e_m$ לכן נשלים אותו לבסיס של V בעזרת $e_{m+1}, \dots, e_n$

אבל $f(e_{m+1}), \dots, f(e_n)$ בסיס של $\operatorname{Im} f \subseteq W$.

נשלים לבסיס של W באמצעות הוקטורים $w_1, \dots, w_m$

(כאן $\dim W = m$).

כעת נגדיר $h: W \to W$ על וקטורי הבסיס

$h(f(e_i)) = g(e_i)$ לכל i

$h(w_i) = 0$ לכל i

ניתן להגדיר אותה כך שם שאנו מגדירים על איברי הבסיס ולפי נשפט לכל קומבינציה של וקטורים ב-W קיימת לפי שמגדירה אלה את וקטורי הבסיס בפרט $g(e_i)$

כעת לכל $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$ אם

$v \in \ker f$: $h(f(v)) = h(0) = 0$ ומאחר $\ker f$ נפרש ע"י h נגדיר

$v \notin \ker f$: $h(f(v)) = g(v)$ כנדרש.

$\blacksquare$

	16	2
1	11	
5	12	10
216	77	

110

שאלה 1

א. פתרון נלקח בשל הטלות:

$$A=\begin{pmatrix} 7-\lambda & -12 & 6 \\ 10 & -19-\lambda & 10 \\ 12 & -24 & 13-\lambda \end{pmatrix}$$

Rank A לפי λ

נפרוס:

$$\xrightarrow{R_3\cdot\frac{1}{12}} \begin{pmatrix} 7-\lambda & -12 & 6 \\ 10 & -19-\lambda & 10 \\ 1 & -2 & \frac{13-\lambda}{12} \end{pmatrix} \xrightarrow[R_2-10R_3]{R_1-(7-\lambda)R_3} \begin{pmatrix} 0 & 2(7-\lambda)-12 & 6-\frac{(7-\lambda)(13-\lambda)}{12} \\ 0 & 1-\lambda & 10-\frac{5}{6}(13-\lambda) \\ 1 & -2 & \frac{13-\lambda}{12} \end{pmatrix}$$

$$** \begin{pmatrix} 0 & 2(1-\lambda) & \frac{72-(7-\lambda)(13-\lambda)}{12} \\ 0 & 1-\lambda & \frac{60-5(13-\lambda)}{6} \\ 1 & -2 & \frac{13-\lambda}{12} \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{חוצה}]{R_1-2R_2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{-168+(13-\lambda)(13-\lambda)}{12} \\ 0 & 1-\lambda & \frac{120-10(13-\lambda)}{12} \\ 1 & -2 & \frac{13-\lambda}{12} \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ 5-נפלה 12 מלה ⊖

נניח $\lambda\neq1$ ונחלק R_2 ב $1-\lambda$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \overset{13^2-\lambda^2}{-168+(13-\lambda)(13+\lambda)} \\ 0 & 1 & \frac{-10(1-\lambda)}{12(1-\lambda)} \\ 1 & -2 & \frac{13-\lambda}{12} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1-\lambda^2 \\ 0 & 1 & \frac{-5}{6} \\ 1 & -2 & \frac{13-\lambda}{12} \end{pmatrix} *$$

נניח $\lambda=1$ נקבל בינתיים 1 ונחלק R_1 ב $\frac{1}{12}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{-5}{6} \\ 1 & -2 & \frac{13-\lambda}{12} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{בינתיים}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

11/11

1) $\lambda\neq1,-1$ לכל λ — $\underline{\text{Rank}A=3}$

2) $\lambda=1$ נציב ב $*$ $\underline{\text{Rank}A=2}$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-5}{6} \\ 1 & -2 & \frac{13}{12} \end{pmatrix}$ בינתיים

3) $\lambda=-1$ נציב ב $**$ $\underline{\text{Rank}A=1}$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 7-\lambda & -12 & 6 \\ 10 & -19-\lambda & 10 \\ 12 & -24 & 13-\lambda \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 7-\lambda & -12 & 6 \\ 1 & \frac{-19-\lambda}{10} & 1 \\ 1 & -2 & \frac{13-\lambda}{12} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 7-\lambda & -12 & 6 \\ 0 & 2-\frac{19+\lambda}{10} & 1-\frac{13-\lambda}{12} \\ 1 & -2 & \frac{13-\lambda}{12} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -12+2(7-\lambda) & 6-\frac{(7-\lambda)(13-\lambda)}{12} \\ 0 & \frac{1-\lambda}{10} & \frac{1+\lambda}{12} \\ 1 & -2 & \frac{13-\lambda}{12} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 6 & -12 & 6 \\ 10 & -20 & 10 \\ 12 & -24 & 12 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2(1-\lambda) & \frac{72-(7-\lambda)(13-\lambda)}{12} \\ 0 & 1-\lambda & \frac{(1+\lambda)\cdot 10}{12} \\ 1 & -2 & \frac{13-\lambda}{12} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{72-(7-\lambda)(13-\lambda)-20(1+\lambda)}{12} \\ 0 & 1-\lambda & \frac{10(1+\lambda)}{12} \\ 1 & -2 & \frac{13-\lambda}{12} \end{pmatrix}$$

Rank=2

$\lambda=1$

$$\begin{matrix} 0 & 0 & \frac{-40}{12} \\ 0 & 0 & \frac{20}{12} \\ 1 & -2 & 1 \end{matrix}$$

$\lambda=5$

$$\begin{matrix} 0 & 0 & \frac{72-8\cdot 8-20\cdot 6}{12} \left(-5\frac{1}{3}\right) \\ 0 & -4 & 5 \\ 1 & -2 & \frac{2}{3} \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 12 & -12 & 6 \\ 10 & -24 & 10 \\ 12 & -24 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -6 & 3 \\ 5 & -12 & 5 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$(n-2)n-n-2$

$$\begin{pmatrix} 1 & -6 & 3 \\ 0 & 8 & 10 \\ 0 & 12 & -8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -6 & 3 \\ 0 & 9 & 5 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$s=3$

K616

$T: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ $U = \ker T$

$R: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$

$\begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \\ 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ $V = \operatorname{Im} R$

$\dim V = 2$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$ $\left(a \ \frac{3a+b}{-2}, a, b\right)$

$a\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$U + V = \operatorname{span}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 6 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\det A = 3$ $\det A^{-1} = \frac{1}{3}$

$\det(A) \cdot \det(A^{-1}) = \det(I) = 1$ $\dim U + V = 3$

$3 = 2 + 2 - 1$

$\forall k$ $\ker f \subseteq \ker g$ $g = h(fv)$ $fv = 0$

$$\begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n & b_1 \\ 2x_1 \quad 3x_2 \quad (n+1)x_n & b_2 \\ \\ (n)x_1 \quad (n+1)x_1 & 2n-1x_n \end{pmatrix} \to \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & & 1 & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & & & \\ & 0 & a_2 & 0 & & \\ & 0 & 0 & a_3 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & a_{n-1} \\ & & & & & a_n \end{vmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \\ & & & \\ 1 & 2 & & n \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & -a_1 & a_1 & 0 & & 0 \\ & & -a_2 & 0 & & \vdots \\ & & & 0 & & \\ & & & & a_{n-1} & 0 \\ & & & & -a_n & a_n \end{vmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & & n \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} b_1 \\ b_2 - b_1 \\ \\ b_n - b_{n-1} \end{matrix} \qquad -b_1$$

δ Vcker $g = 0$

$$-1 \begin{vmatrix} a_1 & & 0 \\ -a_2 & & \\ 0 & & \\ & & a_n \end{vmatrix} \qquad (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} 1 & -a_1 & a_1 & & 0 \\ & & -a_2 & & \\ & & & & \\ 1 & 0 & & 0 & a_{n-1} \\ & & & & -a_n \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ 1 & & & & \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} -1 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_n \\ & & & & 0 \\ & a_{n-2} & & & \\ & 0 & a_{n-1} & 0 & \\ & 0 & 0 & a_n & \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a_1 & -a_1 & & \\ & 0 & a_2 & -a_2 & \\ & 0 & & a_3 & \\ & \vdots & & & \\ 1 & 0 & -a_{n-2} & 0 & \\ & & a_{n-1} & -a_{n-1} & \\ & & 0 & a_n & \end{vmatrix} \qquad -1 \begin{vmatrix} 1 & -a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ & a_2 & -a_2 & & \\ & & a_3 & & \\ & & & & \\ 1 & 0 & & & a_{n-1} \\ & & & & -a_{n-1} \\ & & & & 0 \quad a_n \end{vmatrix}$$

$$(\lambda A)^{-1} \qquad -a_1 \cdot a_2 \left[\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} \right. \qquad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & a_1 & 0 \\ 1 & 0 & a_2 \end{vmatrix} \qquad (I_\lambda)^{-1} \qquad \frac{1}{\lambda} I \qquad \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}$$

$$(I_\lambda A)^{-1} \qquad \frac{a_1 + a_2}{a_1 a_2} \qquad 0 + 0 + 0 - a_1 - a_2$$

$$\lambda^{-1} \cdot T^{-1}$$

12/6/16

$\ker f \leq \ker g$

$g = h(fv)$

$fv \in \ker g \to 0$

$v \in \ker f \quad v$

$\operatorname{Im} f$

$f \cdot v = 0$

$\ker h = \ker g$

$e_1 \quad e_k$

$b \cdot v$

$\ker f = v_1 \quad v_k \to$

v [illegible]

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & & & b_1 \\ 1 & 1 & & 1 & b_2 - b_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & & n-1 & b_1 - b_2 + b_1 \\ 1 & 1 & 1 & & 1 & b_2 - b_1 \end{pmatrix}$$

$v_k, \quad v_n$

$fv_{k+1} \cdot fv_n$

$\ker f$

$w_1 \quad w_m$

$h\, fv_i = g \cdot v_i$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & & n & b_1 \\ & & & & \\ n & & & & b_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & & n \\ 1 & 1 & & 1 \\ & & & \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} b_n - b_{n-1}$$

$$\begin{pmatrix} & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} b_n - b_{n-1} - b_{n-1} + b_{n-2} = b_n - 2b_{n-1} + b_{n-2}$$

$2b_1 - b_2 - b_3 - 2b_4 \quad -(n-1)b_n$

$\underbrace{(U+V)\cap W}_{x\in y} = (U\cap W)+(V\cap W)$

$x = a+b$

$a\in U \quad b\in V$

$a+b\in W$

$a\in W \quad V\in W$

$W = \mathrm{Span}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

$U = \mathrm{Span}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

$V = \mathrm{Span}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

$U\cap W = 0$

$V\cap W = 0$

$\dim \ker T = 2$

R^2

$\begin{pmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$

$T(1,1) + T(-1,1) = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

$(-1, 3)$

$T(0,2) = T(2,-3,9)$

$T(0,1) = \left(\frac{3}{2}\ \frac{-3}{2}\ \frac{9}{2}\right)$

$T(1,1) - T(0,1) = T(1,0) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$

$\begin{pmatrix}\frac{-1}{2} & \frac{3}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{-3}{2}\\ \frac{-3}{2} & \frac{9}{2}\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}-1 & 1\\1 & -1\\-3 & 3\end{pmatrix}$

$\dim \mathrm{Im}\, T = 1$

$\begin{pmatrix}0 & 0\\1 & -1\\-3 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$

(10) (ב) חשבו את הדטרמינטה של המטריצה הבאה:

$$\begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_0 & x & a_2 & \dots & a_n \\ a_0 & a_1 & x & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_0 & a_1 & a_2 & \dots & x \end{bmatrix}$$

בחרו תשובה אחת בלבד:

a. $(x-a_0)(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)$ b. $a_0(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)$

c. $a_0(x^{n-1}-a_1-a_2-\dots-a_n)$

שאלה 4.

(12) (א) יהיו $A,B\in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. אילו מהטענות הבאות נכונות (יש לסמן את כל התשובות הנכונות):

a. אם A,B מטריצות אנטיסימטריות אזי AB מטריצה סימטרית

b. אם $A^TA=0$ אזי $A=0$

c. אם A מטריצה אנטיסימטרית והפיכה אזי A^{-1} גם כן אנטיסימטרית

הערה: מטריצה X נקראת סימטרית אם $X^t=X$, ואנטיסימטרית אם $X^t=-X$.

(10) (ב) פתרו מערכת משוואות לינאריות עבור כל פרמטר λ מרוכב:

$$\begin{cases} (1+\lambda)x_1+x_2+x_3=\lambda^2+3\lambda \\ x_1+(1+\lambda)x_2+x_3=\lambda^3+3\lambda^2 \\ x_1+x_2+(1+\lambda)x_3=\lambda^4+3\lambda^3 \end{cases}$$

בחרו תשובה אחת בלבד:

a. עבור $\lambda\neq 0,-3$ $\begin{cases} x_1=2-\lambda^2 \\ x_2=2\lambda-1 \\ x_3=\lambda^3+2\lambda^2-\lambda-1 \end{cases}$, עבור $\lambda=0$ $x_1=-x_2-x_3$, עבור $\lambda=-3$ $x_1=x_2=x_3$.

b. עבור $\lambda\neq 0,-3$ $\begin{cases} x_1=2+\lambda^2 \\ x_2=2\lambda+1 \\ x_3=\lambda^3+2\lambda^2-\lambda-1 \end{cases}$, עבור $\lambda=0$ $x_1=-x_2-x_3$, עבור $\lambda=-3$ $x_1=x_2=x_3$.

c. עבור $\lambda\neq 0,-3$ $\begin{cases} x_1=2-\lambda^2 \\ x_2=2\lambda-1 \\ x_3=\lambda^3+2\lambda^2-\lambda-1 \end{cases}$, עבור $\lambda=0,-3$ $x_1=-x_2-x_3$.

שאלה 5.

(10) (א) יהי $n\in\mathbb{N}$. הוכיחו כי הפונקציות $e^x,e^{2x},\dots,e^{nx}$ הן בת"ל.

(12) (ב) ותהי $A\in M_n(\mathbb{F})$. נתבונן בטרנספורמציה לינארית $T:M_n(\mathbb{F})\to M_n(\mathbb{F})$ שמוגדרת $T(X)=AX-XA$. הוכיחו כי T חח"ע ועל.

1.6.16

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \dim\ker = 2$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \left(a, \frac{-3a-b}{2}, a, b\right)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad a\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$T: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2 \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ $\qquad U = \ker T$

$R: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4 \quad [\quad] \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\qquad V = \operatorname{Im} R$

$$U \cap V = \operatorname{span}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -\frac{3}{2} & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 8 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\dim U \cap V = 3$

$\dim V = 2$

$\dim V = 2$

$\dim U = 2$

$\dim U + V = 1$:

$3 = 2 + 2 - \dim U \cap V$

תשובות – סעיף ו

1) א) c b ✓ 22

ב) a c ✓

2) א) b ✓ 22

ב) b ✓

3) א) a ✓ 22

ב) b ✓

4) א) b c ✓ 22

ב) a ✓

: к 616

$$\operatorname{adj}(\operatorname{adj}(\operatorname{adj}(A))) = (\det A)^{n-2} \cdot \operatorname{adj} A$$

$$\operatorname{adj} A \cdot A = I \cdot \det A$$

$$\operatorname{adj} A = \det A \cdot A^{-1}$$

$$\operatorname{adj}(\operatorname{adj}(\operatorname{adj}(A)) = \det(\operatorname{adj}(\operatorname{adj} A)) \cdot (\operatorname{adj}(\operatorname{adj}(\operatorname{adj} A)))^{-1} =$$

$$\operatorname{adj} A = A^{-1} \cdot \det A$$

$$\operatorname{adj}(\operatorname{adj} A) = \operatorname{adj} A \cdot \det(A^{-1} \cdot \det A) =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & & n & \vdots & b_1 \\ 2 & 3 & & n+1 & \vdots & b_2 \\ & & & & \vdots & \\ n & & & 2n-1 & \vdots & \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & & n-1 & b_2-b_2 \\ 1 & 1 & & 1 & b_2-b_1 \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & & n & \vdots & b_1 \\ 1 & 2 & & 1 & \vdots & b_2-b_1 \\ \vdots & & & & \vdots & \\ 1 & 2 & & 1 & \vdots & b_{n-1}-b_{n-2} \\ 1 & 2 & & 1 & \vdots & b_n-b_{n-1} \end{pmatrix} \quad -x_3 \; -2x_4 \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & \vdots & 2b_2-b_2 \\ 1 & 1 & \vdots & b_2-b_1 \end{pmatrix} \quad x_2 = 2b_1 - b_2 \quad x_1 = b_2 - b_1 -$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & & n & b_1 \\ 1 & 1 & & 1 & b_2-b_1 \\ & & & & (b_3-b_2)(b_2-b_1) \\ & & & & \\ 0 & 0 & & 0 & (b_n-b_{n-1})-(b_{n-1}-b_{n-2}) \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \lambda_j j x e^{jx}$$

(לפי הנחה)

הנחה: $\{e^{jx}\}_{j=1}^{n}$

$$(**) \quad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \cdot j\, e^{jx} = 0$$

כלומר, נקבל שהמשוואה $(*)$ (נכון לכל x) שווה ל-

$$0 = 0 \cdot x = x\, n \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e^{jx} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x\, e^{jx}$$

נחסר את שני הביטויים האחרונים (לפי x)

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x e^{jx} - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \cdot j e^{jx} = 0 - 0 = 0$$

$$\sum_{j=1}^{n-1} (\lambda_j x - \lambda_j \cdot j) e^{jx} + \lambda_n x e^{nx} - \lambda_n \cdot n e^{nx} = 0$$

$$\sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j (x - j) e^{jx} = 0$$

לפי הנחת האינדוקציה $\{e^{jx}\}_{j=1}^{n-1}$ בת"ל

$\Leftarrow$ $\lambda_j (x-j) = 0 \quad \forall$ אינדקס j שמקיים $j \neq x$

אבל $x - j \neq 0$ $\forall$ אינדקס j שמקיים $j \neq x$

$\Leftarrow$ $\lambda_j = 0$ לכל אינדקס j שמקיים $j \neq x$

(מ"ש ל $(*)$ ו $(**)$ נקבל שגם

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j e^{jx} = 0$$

$$\sum_{j=1}^{n-1} 0 \cdot e^{jx} + \lambda_n e^{nx} = 0$$

$$\lambda_n e^{nx} = 0$$

$\lambda_n \neq 0 \Leftarrow e^{nx} = 0$ אי אפשר כי לא נכון $(e^{nx} = e^{0} = e \neq 0)$

$\Leftarrow$ $\lambda_n = 0$

$\Leftarrow$ $\lambda_j = 0 \quad \forall$ אינדקס j $\Leftarrow$ $\{e^{jx}\}_{j=1}^{n}$ בת"ל ■

(כל אינדקס מסתכם בכל אינדקס)