מבחן באלגברה לינארית 1

מרצה: דר' סיון אלסוקר

מתרגלים: ניר לב, אוסף שבון

סמסטר א, מועד א, תשפ"ד

תאריך הבחינה: 12.03.04

מספר הקורס: 366-1111

משך הבחינה: $3\frac{1}{2}$ שעות

אין להשתמש בחומר עזר כלשהו או בדף לחישובים.

יש לענות על כל השאלות.

סך כל הנקודות במבחן הוא 110.

שאלה 1.

(11) (א) מצאו את כל הפתרונות המרוכבים של המערכת:

$$\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3=a \\ x_1+x_2+x_3=b \\ 3x_1+x_2+x_3=c \end{cases}$$

כאשר $a,b,c\in\mathbb{C}$.

(11) (ב) מצאו את כל הוקטורים $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\in\mathbb{R}^3$ שהם צירוף לינארי של $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$.

שאלה 2.

(11) (א) אם $\{v_1,v_2,v_3\}\subset V$ קבוצה בת"ל אז $\{u_1+u_2,\ u_2-u_3,\ u_1+u_2+2u_3\}$ גם בת"ל.

(11) (ב) תהי $A\in M_{n\times n}(F)$, $\operatorname{char}F\neq 3$, המקיימת $A^3-5A-9I=0$.

הוכיחו כי A הפיכה ומצאו ביטוי למטריצה ההופכית שלה.

שאלה 3.

(11) (א) יהי V מרחב לינארי ממימד סופי מעל $\mathbb{C}$. תהי $S:V\to V$ טרנספורמציה לינארית המקיימת $S^2=2S$. הוכיחו כי $V=\operatorname{Ker}S\oplus\operatorname{Im}S$.

$[S][S]\bar{v}=2[S]\bar{v}$

$[S]\bar{w}=2\bar{w}=\bar{0}$

פיר ה

יהי $[S]\bar{v}=\bar{w}$

$[S]\bar{w}=\bar{0}$

כאן $\ker S\cap\operatorname{Im}S=\{\bar{0}\}$

A-64

שאלה 2 סעיף ג'

11/11

$S:V\to V$, $2S=S^2$

צ"ל $V=\ker(S)\oplus Im(S)$

ראשית נראה כי $\ker(S)\cap Im(S)=0$

~~$v\in V$~~. יהי $v\in\ker(S)\cap Im(S)$

מכיוון ש- $v\in Im(S)$ אזי קיים $u\in V$ כך ש:

$S(u)=v$.

מכיוון ש- $v\in\ker(S)$ אזי $S(v)=0$

מכיוון שנתון $2S=S^2$ $\}$ $0=S(v)=S^2(u)=2\cdot S(u)$

ולכן: $2S(u)=2\cdot v=0$

ולכן v קטן - יקר הוא הכפל.

לכן משפט אחדות - כדיבה: $\dim\ker(S)+\dim Im(S)=\dim V$

ולכן משום שקודמתו שמדובר שלם הוא 0,

לכן משפט המימדים נותן כי $V=\ker(S)\oplus Im(S)$

אוניברסיטת תל-אביב

לפני התחלת הבחינה מלא את וקרא בעיון

תאריך הבחינה 12/3/04

שם הקורס אלגברה לינארית 1

שם המורה סמיון אלסקר

החוג/הס מתמטיקה

037165925

הוראות

1. על הנבחן להיבחן רק בחדר שבו הוא רשום.
2. עם הכניסה לחדר הבחינה יש להניח את החפצים בצד לדבות מכשירי קשר ואמצעי תקשורת אחרים כשהם כבויים.
3. אסור להחזיק בהישג יד, בחדר הבחינה או בסמוך לו, כל חומר הקשור לבחינה/לקורס מלבד לחומר שהשימוש בו הותר בכתב על ידי המורה.
4. יש למלא את הפרטים על מחברת הבחינה במקום המיועד לכך בלבד. אין לכתוב את השם או כל פרט מזהה אחר בתוך המחברת.
5. יש להישמע להוראות המשגיח. נבחן לא יעזוב את מקומו ללא קבלת רשות המשגיח. הפנה בשאלה או בבקשה ירים את ידו.

לשימוש המורה הבוחן:

הציון 100

המחברת נבדקה ביום 28.03.04

חתימת המורה אלסקר

الحل: $T+S = \text{span}\{(1,0,0,1), (0,1,0,0), (0,0,1,-1)\}$

هاشم خالد ابو ١٠٠

שאלה מס' 1 מבחן ב'

יש לבדוק אם כל הוקטורים שרשם בתחילת לינארי ב

11/4

$$\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$$

המשימה נבדקת אם שמשם הוקטורים בכל (מ"ז) הבדיקה משוואות כמו בלבד נבדקת בדיקה אמת משוואות שאלה בדיקה

$$\begin{pmatrix}1&3&1\\-1&0&2\\1&1&-1\end{pmatrix}\xrightarrow[R_3\leftarrow R_3-R_1]{R_2\leftarrow R_2+R_1}$$

$$\begin{pmatrix}1&3&1\\0&3&3\\0&-2&-2\end{pmatrix}\xrightarrow[R_2\leftarrow R_2\cdot(-\frac{1}{2})]{R_3\leftarrow R_3\cdot\frac{1}{3}}\begin{pmatrix}1&3&1\\0&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow[R_3\leftarrow R_3-R_2]{R_1\leftarrow R_1-3R_2}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

משמאל שלבנה שורת אפסים נובע כי אפשר לבנות את הוקטור $\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ בתחילת לינארי ב שני הוקטורים האחרים באופן:

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}+\left(-\frac{2}{3}\right)\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$$

לכן כל הוקטורים $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ שרשם בתחילת לינארי ב משמשים הוקטורים הכל ש"בתים ל:

$$\mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}\right\}$$

כלומר מבנה:

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a-b\\3a\\a+2b\end{pmatrix}$$

$Q = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_k x^k \quad k \le n$

$a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$

עבור כל פולינום השייך ל $p_0, \dots, p_n$ בנוסף

$p_i = b_0 + b_1 x + \dots + b_i x^i$

כאשר נרשום כל איבר $a_i x^i$ השייך לפולינום

Q לדוגמא $p_1, \dots, p_i$ כפולות

$a_i x^i = \frac{1}{b_i} \cdot a_i \cdot p_i -$

$p_0 = b_{00}$

$p_1 = b_{01} + b_{11} x$

$p_2 = b_{02} + b_{12} x + b_{22} x^2$

$\vdots$

$p_n = b_{0n} + b_{1n} x + \dots + b_{nn} x^n$

כאשר נרשום כל איבר $a_i x^i$ השייך ל Q לדוגמא

x כפולות איבר p.

$a_i x^i = \frac{1}{b_{ii}} \cdot a_i \cdot p_i - \frac{1}{b_{i-1,i}} \cdot b_{i-1,i} \cdot p_{i-1} - \dots$

השאיפה נרצה כי כפולות כל הפולינום Q

$p_n, \dots, p_0$ יהיו לצורך איזו נקודה הבסיס הנורמלי

Q $\mathbb{R}[x]$ $(1, x, x^2, \dots, x^n)$

$e_0 = 1 = 1 \cdot p_0$

$e_1 = x$

נמשיך בשלב הבא:

שאלה ב סעיף ג':

נתון: $A^3 - 5A - 9I = 0$

צ"ל: A הפיכה.

כאן כן יש למצוא מטריצה ההופכית שלה

$$\cancel{A(A^2} \quad A^3 - 5A - 9I = 0$$

$$A^3 - 5A = 9I$$

$$A(A^2 - 5I) = 9I$$

$$\frac{1}{9}A \cdot (A^2 - 5I) = I$$

$$A\left(\frac{1}{9}A^2 - \frac{5}{9}I\right) = I$$

כדאי להסביר מדוע רק הופכי ל- 9 בשקר

נגדיר:

$$\frac{1}{9}A^2 - \frac{5}{9}I = X$$

$$A \cdot X = I$$

לפי משפט שהוכח בכיתה יודע A הפיכה מימין אזי היא הפיכה משמאל ולכן A הפיכה.

$$AX = XA = I$$

נקבל שגם כי X היא הטריצה ההופכית ל- A

$$A^{-1} = \frac{1}{9}A^2 - \frac{5}{9}I$$

$\frac{9}{11}$

מכיוון ש L תת מרחב לינארי הוא סגור לחיבור ולכפל בסקלר. הראינו כי ניתן לקבל כל פולינום $Q(x) \in \mathbb{R}[x]_n$ מ"ו פעולות של כפל מינור בסקלר בעזרת פולינומים $p_1, \dots, p_k$ ולכן $L = \mathbb{R}[x]_n$

המשך בעמוד מס' 2

תרגיל 3 מטלה ב:

9/11

$S = span\{(1,2,0,1),(1,1,1,0)\}$

$T = span\{(1,0,1,0),(1,3,0,1)\}$

ראשית נמצא את $S\cap T$

$$\lambda_1\begin{pmatrix}1\\2\\0\\1\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}=\lambda_3\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}+\lambda_4\begin{pmatrix}1\\3\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\lambda_1\begin{pmatrix}1\\2\\0\\1\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}-\lambda_3\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}-\lambda_4\begin{pmatrix}1\\3\\0\\1\end{pmatrix}=0$$

מערכת המשוואות היא: (סמנים!!)

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&-1&-1&0\\2&1&0&3&0\\0&1&-1&-0&0\\1&0&0&1&0\end{array}\right)\quad \begin{array}{l}R_1\leftarrow R_1-R_4\\R_2\leftarrow R_2-2R_4\end{array}$$

-2

$$\left(\begin{array}{cccc|c}0&1&1&0&0\\0&1&0&1&0\\0&1&1&0&0\\1&0&0&1&0\end{array}\right)\quad R_3\leftarrow R_3-R_1$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c}0&1&1&0&0\\0&1&0&1&0\\0&0&0&0&0\\1&0&0&1&0\end{array}\right)\xrightarrow{R_1\leftarrow R_1-R_2}\left(\begin{array}{cccc|c}0&0&1&-1&0\\0&1&0&1&0\\0&0&0&0&0\\1&0&0&1&0\end{array}\right)$$

$\lambda_4=t \quad \lambda_3=t \quad \lambda_2=-t \quad \lambda_1=-t$

ולכן הבסיס ל $S\cap T$ הוא:

$span\{\cancel{(-1,-1,1,1)}\}$

כדי למצוא את $S+T$: נבנה מטריצה ל וקורות

$$\begin{pmatrix}1&2&0&1\\1&1&1&0\\1&0&1&0\\1&3&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2\leftarrow R_2-R_3}\begin{pmatrix}1&2&0&1\\0&1&0&0\\1&0&1&0\\1&3&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[R_4\leftarrow R_4-3R_2]{\text{השורה: } R_1\leftarrow R_1-2R_2}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&0\\1&0&1&0\\1&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_4\leftarrow R_4-R_1}\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3\leftarrow R_3-R_1}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

המשך בעמ' הבא

2

אוניברסיטת תל-אביב

לפני התחלת הבחינה מלא את
וקרא בעיון

תאריך הבחינה 12/3/04

שם הקורס אלגברה לינארית 1

שם המורה סמיון אלסקר

החוג/המגמה מתמטיקה

על הנבחן להיבחן רק בחדר שבו הוא רשום.

עם הכניסה לחדר הבחינה יש להניח את החפצים בצד לרבות מכשירי קשר ואמצעי תקשורת אחרים כשהם כבויים.

אסור להחזיק בהישג יד, בחדר הבחינה או בסמוך לו, כל חומר הקשור לבחינה/לקורס פרט לחומר שהשימוש בו הותר בכתב על ידי המורה.

יש למלא את הפרטים על מחברת הבחינה במקום המיועד לכך בלבד. אין לכתוב את השם או כל פרט מזהה אחר בתוך המחברת.

יש להישמע להוראות המשגיח. נבחן לא יעזוב את מקומו ולא קבלת רשות המשגיח. הסובה בשאלה או בבקשה ירים את ידו.

חתימת המורה הנבחן:

חתימה:

תרגיל 4 סמסטר א': 11/11

$L \subset \mathbb{R}[x]_n$ תת מרחב של פולינומים שמדרגתם קטנה שווה מ-n. נראה כי L מכיל לפחות פולינום אחד מכל דרגה בין 0 ל-n. אם $L = \mathbb{R}[x]_n$ נראה פולינום אחד מכל דרגה בין 0 ל-n (אנו יכולים לבחור לעצמנו את הבסיס).

נטפיל לנוחות כי הפולינומים שבחרנו בלתי תלויים לינארית נניח בשביל כך כבר קיבלנו מסי ב-L ונראה כי הם פורשים את $\mathbb{R}[x]_n$.

ראשית נוכיח כי הפולינומים בלתי תלויים לינארית:

$\lambda_0 p_0 + \lambda_1 p_1 + \dots + \lambda_n p_n = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$

הוכחה באינדוקציה: ($\deg p_0 = 0, \deg p_1 = 1, \dots, \deg p_n = n$).

בסיס: $n=0$: הפולינום הוא קבוע, לכן $\lambda_0 = 0$

צעד האינדוקציה: נניח את נכונות הטענה לגבי n ונוכיח לגבי n+1.

$\lambda_0 p_0 + \lambda_1 p_1 + \dots + \lambda_n p_n + \lambda_{n+1} p_{n+1} = 0$

* מכיוון ש: p_{n+1} מכיל את האיבר x^{n+1}, שלא מופיע אף אחד מהפולינומים האחרים (הדרגות שלהם הן לכן אפס כי דרגת הפולינום הגדולה n+1) אזי $\lambda_{n+1} = 0$.

$$\underbrace{\lambda_0 p_0 + \lambda_1 p_1 + \dots + \lambda_n p_n}_{0 \text{ לפי הנחת האינדוקציה.}} + \underbrace{\lambda_{n+1} p_{n+1}}_{0 \text{ לפי } *} = 0$$

לכן $p_1, \dots, p_n$ בת"ל.

כעת נראה לבסוף כי הם פורשים את $\mathbb{R}[x]_n$

יהי $Q \in \mathbb{R}[x]_n$ ברור לנוכחות כי ניתן לכתוב את Q כצירוף לינארי $p_1, \dots, p_n$

המשך בעמ' הבא

תרגיל מס' 1:

11/11

$\cancel{V=\{A\}}$

$$V=\{A\in M_n\mathbb{F} \mid A^t=A\}$$
$$U=\{A\in M_n\mathbb{F} \mid A^t=-A\}$$

נראה $M_n\mathbb{F}=U+V$

ראשית נוכיח כי $U\cap V=0$

נניח $A\in U\cap V$

אזי $A=-A \Rightarrow A=-A^t$, $A=A^t$

ולכן $A=0$.

כעת מספיק להוכיח כי $\dim U+\dim V=\dim M_n(\mathbb{F})$

$*$ $\dim M_n(\mathbb{F})=n^2$

$**$ $\dim U=\frac{n^2-n}{2}$

$***$ $\dim V=\frac{n^2-n}{2}+n$

$*$ הסבר: $n^2=\dim M_n(\mathbb{F})$ שכן הבסיס הסטנדרטי:

$$\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\ \vdots&&0&\cdots&0\\ 0&\cdots&\cdots&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&1&0&\cdots&0\\ &&\vdots&&\\ 0&&&&0\end{pmatrix},\ \ldots$$

$**$ הסבר: $\dim U=\frac{n^2-n}{2}$ נשים שלב מרתק G מטריצות אלכסוניות כל איבריו הינם אפסים. אחרת לא ניתן $A^t=-A$. הבסיס שנבנה מרתק לב:

את הבנתו ניקחת הזוג $(1,2)$ $*$ 1 נבנה מקום הזוג 1-

$$e_1=\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&0&\\0&&\ddots&0\end{pmatrix},\ e_2=\begin{pmatrix}0&0&1&\cdots&0\\0&\ddots&&&\vdots\\-1&&0&&\vdots\\ \vdots&&&\ddots&\\0&&&&0\end{pmatrix},\ \ldots$$

האיברים בבסיס הם כל כי נלקח מקומות הזוג הזה לכל אחד המטריצה שלים לבסיס. כמו כן הם פורשים את U

תהיה נניח $B\in U$ $*$

$$B=\begin{pmatrix}0&b_{12}&b_{13}&\cdots&b_{1n}\\-b_{12}&&&&\vdots\\-b_{13}&&&&\vdots\\ \vdots&&&&\vdots\\-b_{1n}&\cdots&\cdots&\cdots&0\end{pmatrix}$$

$$B=b_{12}\cdot e_1+b_{13}\cdot e_2+\ldots+b_{n-1,n}\cdot e_{\frac{n^2-n}{2}}$$

ולכן הוא בבסיס של U

נגדיר:

$$p_0 = b_{00}$$
$$p_1 = b_{01} + b_{11}x$$
$$p_2 = b_{02} + b_{12}x + b_{22}x^2$$
$$\vdots$$
$$p_n = b_{0n} + b_{1n}x + b_{2n}x^2 + \dots\dots + b_{nn}x^n$$

כפי נראה כי באמצעות בינרית לשאר $p_1,\dots,p_n$ ניתן לבנות את G אותה מאבדי הבסיס הסטנדרטי. (הבסיס הסטנדרטי $(1, x, x^2, \dots, x^n)$).

$$e_0 = 1 = \frac{1}{b_{00}} \cdot p_0$$

$$e_1 = x = (p_1 - e_0 \cdot b_{01}) \cdot \frac{1}{b_{11}}$$

$$e_2 = x^2 = (p_2 - e_0 \cdot b_{02} - e_1 \cdot b_{12}) \cdot \frac{1}{b_{22}}$$

$$\vdots$$

$$e_n = x^n = (p_n - e_0 b_{0n} - e_1 b_{1n} - \dots - e_{n-1} b_{n-1,n}) \cdot \frac{1}{b_{nn}}$$

המעבר מ- e_i ל-e_{i+1} הוא תהליך משוחק משוחק שלפני הרשמנו כ e_i הבאנו לכלול את e_{i+1} בדומה שמאל נבנה ע"י $p_1,\dots,p_n$.

ההכפלה ב $\frac{1}{b_{ii}}$ היתה תהליך משוחק שבוצעו רק i הקבוע $b_{ii} \neq 0$ (כי ר"מ לפחות פולינום אחד מ G מדרגה i ומעלה כדרגה). כפי i מדרגה G

$Q \in \mathbb{R}[x]_n$ ניתן לבטאו כבינרית לשאר G וקבלנו כבסיס $e_0, \dots, e_n$. בנית $q_0,\dots,q_n \in \mathbb{R}$ ו $k \le n$

$$Q(x) = q_0 + q_1 x + \dots + q_k x^k = q_0 \cdot e_0 + q_1 e_1 + \dots + q_k e_k =$$

$$= q_0\left(\frac{1}{b_{00}} p_0\right) + q_1 \underbrace{\left[\left(p_1 - \frac{1}{b_{00}} p_0 \cdot b_{01}\right) \frac{1}{b_{11}}\right]}_{e_1} + \dots\dots$$

$$+ q_k\left(p_k - e_0 b_{0k} - e_1 b_{1k} - \dots - e_{k-1} b_{k-1,k}\right)$$

כלומר ניתן לבטא $Q(x) \in \mathbb{R}[x]_n$ כבינרית לשאר G $p_1,\dots,p_n$.

שאלה 5 סעיף ב':

$A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ $\quad tr(AA^t)=0$ $\quad$ אז $\quad A=0$

11/11

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$A^t=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & & & \vdots \\ a_{13} & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$tr(AA^t)$ הוא סכום איברי האלכסון הראשי של AA^t

כל a_{ii} אחד מאברי האלכסון ב AA^t

שזה הוא סכום של ריבועים $a_{ii}=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 = a_{i1}^2+a_{i2}^2+\dots+a_{in}^2$

לכן עבור כל i $\quad a_{ii}\geq 0$ כי הוא סכום של

ריבועים סקלרים. כאן כן שזה הנתון

$tr(AA^t)=\sum_{i=1}^{n} a_{ii}=0$

ולכן עבור כל i $\quad a_{ii}=0$.

כלומר שעבור כל i

$a_{i1}^2+a_{i2}^2+\dots+a_{in}^2=0$

ולכן עבור כל i

$a_{i1}=0,\ a_{i2}=0,\ \dots,\ a_{in}=0$

לכן הטרנזיטיבי $A=0$

סיום

1	2	3	4	5	6
0	1	3	6	10	15

$$A^3 - 5A = 9I$$

$$A(A^2 - 5I) = 9I$$

$$\begin{matrix} 0 & 1 & \cdots & \cdot \\ 1 & 0 & \cdots & \cdot \\ & 0 & \cdots & \cdot \\ & & 0 & \cdot \\ & & 0 & \cdot \\ & & & 0 \end{matrix}$$

$$A^3 - 5A - 9I = 0$$

$$A^3 = 5A + 9I$$

$$S^2(u) = 2S(v) = 0$$

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{matrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} \frac{1}{3} & & +\frac{2}{3} \\ 1 & -\frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & & -\frac{4}{3} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 5 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 5 & 2 \end{matrix}$$

$$(c - 3b) - 2(a - 2b)$$

$$c - 3b - 2a + 4b$$

$$c + b - 2a$$

$$\left\lfloor \frac{n^2 - n}{2} \right\rfloor$$

$$S^2 = 2S$$

$$S(S(v)) = 2 \cdot S(v)$$

$$v \in \ker(S) \cap \operatorname{Im}(S)$$

$$\cancel{\exists u.\ S(u) = v}$$

$$a_i x^i$$

p_i

3. (15 נק') נתונה המטריצה הממשית $A=\begin{pmatrix}5 & 2 & -3\\ 2 & 3 & 0\\ 2 & 1 & -1\end{pmatrix}$

מצאו את המטריצה ההפוכה A^{-1}
(הערה: אין לפרט כאן את החישוב, אך שימו לב שניתן לבדוק את התשובה שקבלתם)

תשובה: $\begin{pmatrix}-3 & -1 & 9\\ 2 & 1 & -6\\ -4 & -1 & 11\end{pmatrix}$

4. (14 נק') נתונים שני תתי מרחבים $U,W\subseteq R^3$:

$$W=Sp\{(1,3,4),(1,1,0)\} \qquad U=Sp\{(3,4,8),(5,2,4)\}$$

מצאו בסיס לחיתוכם $U\cap W$.
(הערה: אין לפרט כאן את החישוב, אך כדי לבדוק את תשובתכם תוכלו להיעזר בכך שהקורדינטות מהוות סדרה חשבונית).

תשובה: $\left(0,-\frac{14}{3},-\frac{28}{3}\right)$

$(0,1,2)$

תרגיל 4 מטלה ג:

ש3

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 5 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & & \ddots & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots 2 & 5 \end{vmatrix} = \frac{1}{3}\left(4^{n+1}-1\right)$$

הוכחה באינדוקציה:

בסיס: $n=1$

$$|5| = \frac{1}{3}\left(4^2-1\right) = 5$$

$n=2$

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = \frac{1}{3}\left(4^3-1\right) = 21$$

צעד באינדוקציה: נניח עבור $n-1$ ונוכיח עבור n

פיתוח לפי שורה ראשונה:

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 5 & 2 & 0 & & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & & \ddots & 2 \\ 0 & 0 & \cdots & & 2 & 5 \end{vmatrix}_{n\times n} =$$

$$= 5\begin{vmatrix} 5 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 5 & 2 & & 0 \\ 0 & 2 & 5 & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & 2 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 5 \end{vmatrix}_{n-1\times n-1} - 2\begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 5 & 2 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 5 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & 2 \\ 0 & \cdots & & 2 & 5 \end{vmatrix}_{n}$$

פיתוח לפי שורה ראשונה

לפי הנחת האינדוקציה.

$$= 5\cdot\frac{1}{3}\left(4^n-1\right) - 2\cdot 2\begin{vmatrix} 5 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 5 & 2 & & \vdots \\ 0 & 2 & 5 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & 2 \\ 0 & \cdots & & 2 & 5 \end{vmatrix}_{n-2\times n-2} =$$

$$= 5\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(4^n-1\right) - 4\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(4^{n-1}-1\right) =$$

$$= 5\cdot\frac{1}{3}\left(4^n-1\right) - \frac{1}{3}\cdot\left(4^n-1\right) = 4\cdot\frac{1}{3}\left(4^n-1\right) =$$

$$= 4^{n+1}-1$$

11/11

מעולה

לא נכון

מן שאינו $T^{-1}\circ S\circ T(v)=2S(v)$ מאחר ו- T הינה איזומורפיזם (חח"ע ועל)

מן שאמר כי הוא הפיכה, אם נפעל את T על שני אגפי השוויון: $T\circ T^{-1}\circ S\circ T(v)=T(2S(v))$

ומקיימת ש: $S\circ T=2T\circ S(v)$ מאחר ו- A ו- B מייצגים את S,T

נקבל כי $B\cdot A=2AB$ (כפל מטריצות שקול לכפלה של הס"ל המתאימה)

בהנחה שאם תמן ונתון כי $B\neq 0$ ו- A איזומורפיזם $(A\neq 0)$ $BA=2AB\neq AB$ לכן הנכון

8. תהי L מערכת משוואות (הומוגנית או לא) ב- 3 נעלמים מעל הממשיים.
אם (1,2,3) ו- (4,5,6) הנם פתרונות של L, אזי בהכרח גם (7,8,9).

נכון. $a_1+2a_2+3a_3=b$! A ו- B לא נכון $A\neq 0$ ו $B\neq 0$ אם $AB\neq 0$ נקבל כי $A\neq 0$ ו- $B\neq 0$

נציב את שני הפתרונות במש': $4a_1+5a_2+6a_3=b$. אם נחסיר את השוויונות ונחלק ב-3

נקבל: $a_1+a_2+a_3=0$. כלומר שהפתרון הכללי למש' ההומוגנית הינו עבורה (t,t,t)

ידוע כי חיבור של פתרון כלשהו של מש' הומוגנית עם פתרון כלשהו של המש' הלא הומוגנית יתן פתרון לא הומוגנית אחרת

$(t+1,t+2,t+3)=(t,t,t)+(1,2,3)$ פתרון כללי למש' ההומוגנית, פתרון כלשהו למש' הלא הומוגנית

אם נבחר $t=6$ נקבל כי $(7,8,9)$ פותר את המש' אל הוא.

9. יהי F שדה ותהיינה $T,S:M_3(F)\to M_2(F)$ טייל (כאשר רואים את $M_n(F)$ כמ"ו מעל F באופן הרגיל). אזי קיימת מטריצה $0\neq A\in M_3(F)$ כך ש- $T(A)=0=S(A)$.

נכון. נשמן: $V=M_3(F)$ $W=M_2(F)$ $\dim(V)=9$ לפי משפט הדרגה והאפסה

$\dim V=r(T)+n(T)$ $\Leftarrow$ $\dim(\ker(T))+r(T)=9$. $r(T)$ המקסימלי הינו 4 (מאחר ו- $\dim W=4$).

לכן נקבל כי $\dim\ker(T)\geq 5$. באופן דומה $\dim\ker(S)\geq 5$. לפי משפט המימד הבא שאין:
$\dim V=\dim(\ker T)+\dim(\ker S)-\dim(\ker(T)\cap\ker(S))$

$\ker(T)$ ו- $\ker(S)$ מכילים את מרחב ה- V, ולכן:

נקבל כי $\dim(\ker(T)\cap\ker(S))\geq 1$ ולכן בהכרח שקיים לפחות מטריצה אחת A כמתואר ולכן $T(A)=S(A)=0$ (כי היא נמצאת גם ב- $\ker T$ ו- $\ker(S)$)

לשימוש הבודקים בלבד:

סה"כ	9	8	7	6	5	4	3	2	1
100	8	8	8	8	8	14	15	16	18

** הסכום: $\dim V = \frac{n^2-n}{2}+n$ נשאיר שנתן מרחב G מטריצות סימטריות לא שונות מה נצא כולכם, לכן

$$e_1=\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\0&\ddots&&\vdots\\\vdots&&\ddots&0\\0&\cdots&0&0\end{pmatrix},\quad e_2=\begin{pmatrix}0&1&\cdots&0\\1&\ddots&&\vdots\\\vdots&&\ddots&0\\0&\cdots&0&0\end{pmatrix},\quad \ldots$$

שיהיו לכולם.

שלב: איברים אלו כמו בסעיף הקודם - יהיו בצורה במקום ה ij 1 (i<j) נצא במקום ה ji 1 בשאר אפסים

$$e_{n+1}=\begin{pmatrix}0&1&&\\1&0&&0\\&&\ddots&\\0&&&0\end{pmatrix},\quad e_{n+2}=\begin{pmatrix}0&0&1&\\0&0&&\\1&&\ddots&0\\&0&&0\end{pmatrix},\quad \ldots$$

אלו הם איברים בתוך המרחב עם (שזה כי שלב במקומות ה ij ה ji שווים ל-0).

נניח כי $B\in V$

$$B=\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}&\cdots&b_{1n}\\b_{12}&b_{22}&&&\vdots\\b_{13}&&\ddots&&\vdots\\\vdots&&&\ddots&\\b_{n1}&\cdots&&\cdots&b_{nn}\end{pmatrix}=b_{11}e_1+b_{22}e_2+\ldots+b_{nn}e_n+$$

$$+b_{12}e_{n+1}+\ldots+b_{n-1,n}\cdot e_{\frac{n^2-n}{2}+n}.$$

לכן נשאיר שהראנו:

$$\dim U+\dim V=\left(\frac{n^2-n}{2}\right)+\left(\frac{n^2-n}{2}+n\right)=n^2=\dim M_n(\mathbb{F})$$

ונשאיר ל: $U\cap V=0$ ונשאיר ל $U\subset M_n(\mathbb{F})$ $V\subset M_n(\mathbb{F})$

אז:

$$M_n(\mathbb{F})=U+V$$

חלק I

1) **משפט המימד הבינומי:**

יהי V מ"ו נוצר סופית על שדה F ו- $U, W \subseteq V$ תת"מ.
אז מתקיים כי

$$\dim(U+W) = \dim U + \dim W - \dim U \cap W$$

הוכחה: נסמן: $\dim U = l$ $\quad \dim W = n$
$\dim U \cap W = k$.

יהיו כי התת"מ של שני תת"מ U ו- W מתאר תת"מ.
נבחר $\{v_1, \dots, v_k\}$ קבוצה של k וקטורים ב- $U \cap W$
אשר מהווים **בסיס** ל- $U \cap W$.
מאחר והקבוצה הנ"ל היא קבוצה בת"ל ב. בתת"מ U וגם
בתת"מ W ניתן להשלים לבסיס בכל מאחד המרחבים
הללו (לפי המשפט שלפי קבוצה בת"ל ניתן להרחיב וקטורים
עד שהיה בסיס מקסימלי).
לכן נשלים לבסיס $\{v_1, \dots, v_k, w_1, \dots, w_{n-k}\}$ קבוצה לבסיס של W:
[הוספנו את $w_1, \dots, w_{n-k}$ וקטורים]
ונשלים לבסיס של U: $\{v_1, \dots, v_k, u_1, \dots, u_{l-k}\}$ וקטורים.
נשים לב שגם נוכח כי $\{v_1, \dots, v_k, u_1, \dots, u_{l-k}, w_1, \dots, w_{n-k}\}$

מהווים בסיס ל- $U+W$ אז נוכח את המשפט המימד הבינומי
עלה כי $\dim(U+W) = k + (l-k) + (n-k) = l + n - k$
שזה בדיוק $\dim U + \dim W - \dim U \cap W$.
נראה שקבוצה זו אכן מהווה בסיס ל- $U+W$:
נבדוק שקבוצה זו **פורשת** (את $U+W$)
יהי וקטור $v \in U+W$ כלשהו. יהיו כי ניתן לכתוב באופן יחיד
$u \in U$ ו- $w \in W$ $\Leftarrow$ $v = u + w$.
מאחר ו- $\{v_1, \dots, v_k, u_1, \dots, u_{l-k}\}$ פורשים את U:
אז קיימים $a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_{l-k} \in F$ כך ש- $u = \sum_{i=1}^{k} a_i v_i + \sum_{i=1}^{l-k} b_i u_i$