מס' מר

מס' ת"

מועד א' סמסטר ב'
2.7.2004

אלגברה לינארית 1

מרצה: פרופ' יהודה שלום
מתרגל: אסף שרון

- **משך הבחינה: שלוש שעות.**
- **חומר סגור ללא מחשבי עזר.**
- **יש לענות על שאלות 1,2 בעמודים הראשונים של מחברת הבחינה ועל שאלות 3-9 יש לענות בטופס בחינה זה, במקום המיועד לכך בלבד.**
- **מומלץ להעתיק את התשובות לשאלות 3-9 לטופס הבחינה רק לאחר בדיקה חוזרת ותוך שימוש בעמודים האחרונים של מחברת הבחינה כטיוטא. בניקוד שאלות אלו לא תהיה כל התייחסות לנכתב במחברת הבחינה אלא רק לנכתב בטופס עצמו.**
- **סך הנקודות שבשאלות הוא 105 אולם הציון המקסימלי הוא 100.**

בהצלחה !

1. (18 נק') יהי V מ"ו נוצר סופית מעל שדה F , $U,W \subseteq V$ תתי מרחבים. נסחו והוכיחו את המשפט המקשר בין מימדי $U+W, U, W$ ו $U \cap W$ (ניתן להשתמש בכל משפט קודם בנוגע למימד, תלות פרישה וכד').

2. (18 נק') יהי F שדה ו $A \in M_n(F)$ הוכיחו כי $\det A = \det A^t$
(ניתן להשתמש בכל טענה בנוגע לתמורות)

A-65

כלומר, אם נדרוש את התכונה שהיא שמורה
עבור כל שני מרחבים U ו W. ובכך
הטענה ההומוטופית כי ניתן ש-

$$\dim(U+W) = \dim U + \dim W - \dim(U\cap W).$$

$$(k+n-k) \qquad l \qquad n \qquad k$$

18

בשאלות 5-9 רשמו ליד כל טענה נכון/לא נכון ותנו הוכחה קצרה.
מומלץ לרשום את התשובה בטופס רק לאחר בדיקה חוזרת.
אין לחרוג מהמקום המוקצה לתשובה. לכל שאלה 8 נקודות.

5. יהיה V מ"ו מעל שדה F. נתונה קבוצה A של 10 וקטורים ב- V, עם התכונה שלכל תת-קבוצה של A עם 7 וקטורים ישנו וקטור אחר ב- A שאינו צ"ל של איברי תת קבוצה זו. אזי בהכרח $\dim_F V > 7$.

נכון: נניח בשלילה כי $\dim V \le 7$, אזי כל קבוצה של 8 וקטורים חייבת להיות תלויה (לפי הנתון שיש קבוצה בגודל 7 שבה יש וקטור אחד לא תלוי)

ניקח את כל הוקטורים, בכל שאר אפשר הנו בת"ל. כל השאר, אם נוסיף אותו נישאר עם 8 וקטורים בכל מקרה תלויה ולכן נוכל לבחור וקטור שנתון בת"ל של השאר. נישאר עם 8 וקטורים ובאופן אותה נוכל לבחור שוב וקטור שנתון בת"ל של הבחירה. כלומר קבוצה של 7 וקטורים, אפשר כל שאר הוקטורים הנם בת"ל של איברי הקבוצה. זה סתירה לכן $\dim V \le 7$

6. יהי V מ"ו מעל שדה השאריות בחילוק ב- p ($F = Z_p$ p ראשוני).
נתון שב- V ישנם בדיוק 16 וקטורים שונים. אזי בהכרח
I $p = 2$ II $\dim_F V = 8$ (ענו על כל חלק בנפרד)

נתון כי ב- V ישנם בדיוק 16 וקטורים שונים. מה הוקטורים ב- V בנוי (מ"ו) (מעל איבר נכון) מאיתו ולא יכול להיות מורכב מ"ו מאבר השדה בלבד שבתחילת שו)
יכולות להיות 2 אפשרויות: $16 = 4^2$, כלומר מ"ו מעל איבר השדה הוא 4 ו- $\dim V = 2$.

כלומר יכול להיות מאיתו ו- 4 אינו מ"ו הפשוט ואינו יודעים כי ב- Z_p יש p איברים
ו- p חייב להיות הפשוט, לכן נישאר עם האפשרות $16 = 2^4$. נמצאנו ש- $p=2$ I
(בחלק הבא נכון) II לעומת מאיתו ו- $\dim V = 8$ אין הינו מכלול שמעל איברי V הנ"ל $16 \ne 2^8$. ניקח את $V = Z_2^{(n)}$ ← יש בו 16 וקטורים ו- $\dim(V) = 8$

7. יהי V מ"ו מעל R ו- $T,S:V \to V$ ט"ל.
נתון ש- T איזומורפיזם וש- S אינה זהותית O. נניח שהמטריצות B,A מייצגות את S,T (בהתאמה) ביחס לבסיס כלשהוא של V הנלקח בתחום ובטווח, ושמתקיים לכל $v \in V$ $T^{-1}ST(v) = 2S(v)$. אזי מתקיים $BA = AB$.

8

4 נקודות משמאל לימין ב $\mathbb{R}$.

אם 1, 2, 3 , 4, 5, 6 בתפוצה ע"פ z, מה 7, 8, 9 ?

$(a_1\ a_2\ a_3)\ 0$

$x + 2y + 3z = b$

$4x + 5y + 6z = b$

$-2, 1, 1$

$x + 3y - 3z = 0$

$a_1 + a_2 + a_3 = 0$

t, t, t אם המקור 1, 2, 3

$(t, t, t) + (1, 2, 3) = (t+1, t+2, t+3)$

$-3\ 2\ 1\ b$

$-3 + 4 + 3 = b$

$-12 + 10 + 6 = b$

$-21 + 16 + 9 = b$

9 F שדה.

$T, S : M_3(F) \to M_3(F)$ כך

$A \in M_3(F)$ ע"פ

$T(A) = 0 = S(A)$

$\begin{pmatrix} x & x & x \\ x & x & x \\ x & x & x \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x & x \\ x & x \end{pmatrix}$ $\dim = 4$

$\dim = 9$

$V = \dim \operatorname{Im} T + \dim \ker T$

$9 = 4 + \_\_$

S מוכרח $\ker T$ מלא

!

1138 מס

23

אוניברסיטת תל-אביב UNIVERSITY

לפני התחלת הבחינה מלא את כל הפרטים הבאי
וקרא בעיון את ההוראות:

1. על הנבחן להיבחן רק בחדר שבו הוא רשום.
2. עם הכניסה לחדר הבחינה יש להניח את החפצים בצד לרבות מכשירי קשר ואמצעי תקשורת אחרים כשהם כבויים.
3. אסור להחזיק בהישג יד, בחדר הבחינה או בסמוך לו, כל חומר הקשור לבחינה/לקורס פרט לחומר שהשימוש בו הותר בכתב על ידי המורה.
4. יש למלא את הפרטים על מחברת הבחינה במקום המיועד לכך בלבד. אין לכתוב את השם או כל פרט מזהה אחר בתוך המחברת.
5. יש להישמע להוראות המשגיח. נבחן לא יעזוב את מקומו ללא קבלת רשות המשגיח. הפונה בשאלה או בבקשה ירים את ידו.
6. נבחן שנכנס (טופס הבחינ זה. היה והחל רשאי לעזוב) שעה ממועד המחברת וה
7. קריאת השאל המשגיח.
8. יש לכתוב את נבחן הבוחר הימני של דפי "טיוטה".)
9. מחברות הבח ובאחריותו ב החדר יופקדו
10. בתום הבחינה ויקבל מידי
11. הנוהג בניגוד ל ציונים" צפוי משמעתי.
12. אין לכתוב מ

לשימוש המורה הבוחן:

הציון	100
המחברת נבדקה ביום	
חתימת המורה	

תאריך הבחינה 2/7/04

שם הקורס אלגברה לינארית 1

שם המורה יהודה שלום

החוג/המגמה מתמטיקה ומדעי המחשב

מס' זיהוי
(העתק מכר

$-4+6$

1 ejercicio

$U, W \subseteq \mathbb{R}^3$

$W = sp\begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ $\quad U = sp\begin{pmatrix}3\\4\\8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\2\\4\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & -3 & -5\\3 & 1 & -4 & -2\\4 & 0 & -8 & -4\end{pmatrix} \to \begin{matrix}1 & 1 & -3 & -5\\0 & -2 & 5 & 13\\0 & -4 & 4 & 16\end{matrix} \to$$

$-\frac{13}{2} + \frac{5}{2}\cdot\frac{5}{3} = \frac{4}{6}$

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & -3 & -5\\0 & 1 & -1 & -4\\0 & -2 & 5 & 13\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 1 & -3 & -5\\0 & 1 & -1 & -4\\0 & 0 & 3 & 5\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & 0 & -2 & -1\\0 & 1 & -1 & -4\\0 & 0 & 1 & \frac{5}{3}\end{pmatrix}$$

$\frac{5}{2} \cdot \frac{2}{5} = \frac{5}{3}$

$$\to \begin{matrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{matrix}$$

$\frac{10}{3} - 1 = \boxed{\frac{7}{3}}$

$\frac{5}{3} - 4 + \frac{2}{3} - 3 = -\frac{7}{3}$

$\boxed{\frac{5}{3}}$

$\left(-\frac{7}{3}t, \frac{7}{3}t, -\frac{5}{3}t, t\right) \to (-7, 7, -5, 3)$

bi $w_i = v = \sum a_i u_i \Leftarrow v \in U \cap W$

$$\alpha\begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \gamma\begin{pmatrix}3\\4\\8\end{pmatrix} + \times\begin{pmatrix}5\\2\\4\end{pmatrix}$$

$$(t+2s)\begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix} + (4t+s)\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix}t+2s\\3t+6s\\4t+8s\end{matrix} + \begin{matrix}4t+s\\4t+s\\0\end{matrix} = \begin{matrix}5t+3s\\7t+7s\\4t+8s\end{matrix}$$

$$s\begin{pmatrix}3\\4\\8\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}5\\2\\4\end{pmatrix} \qquad \begin{matrix}5t+3s\\2t+4s\\4t+8s\end{matrix}$$

$-\frac{21}{3} + \frac{7}{3} =$

$$-\frac{7}{3}\begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix} + \frac{7}{3}t\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{matrix}0\\-7+\frac{7}{3}\\-\frac{28}{3}\end{matrix} \qquad \begin{matrix}0\\-\frac{14}{3}\\-\frac{28}{3}\end{matrix}$$

$$-\frac{5}{3}t\begin{pmatrix}3\\4\\8\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}5\\2\\4\end{pmatrix} = \begin{matrix}0\\-\frac{20}{3}+2\\4-\frac{5\times 8}{3}\end{matrix} \qquad \begin{pmatrix}0\\-\frac{14}{3}\\-\frac{28}{3}\end{pmatrix}t$$

$-7\begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix} + 7t\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \qquad -5t\begin{pmatrix}3\\4\\8\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}5\\2\\4\end{pmatrix}$

$= \begin{matrix}0\\-14t\\-28t\end{matrix}$

$\frac{12}{3} - \frac{40}{3} =$

בגלל שאפשר קיימים $c_1 \dots c_k, d_1 \dots d_{n-k} \in F$ כך ש-

$$w = \sum_{i=1}^{k} c_i v_i + \sum_{i=1}^{n-k} d_i w_i$$

ולכן:

$$v' = u + w = \sum_{i=1}^{k} a_i v_i + \sum_{i=1}^{l-k} b_i u_i + \sum_{i=1}^{n-k} d_i w_i + \sum^{k} c_i v_i$$

כלומר שקבוצת $\{v_1 \dots v_k, u_1 \dots u_{l-k}, w_1 \dots w_{n-k}\}$ פורשים את המרחב $u + w$.

נראה כי $\{v_1 \dots v_k, u_1 \dots u_{l-k}, w_1 \dots w_{n-k}\}$ הינה קבוצה בת"ל:

נניח כי:

$$(*) \quad \sum_{i=1}^{k} a_i v_i + \sum_{i=1}^{l-k} b_i u_i + \sum_{i=1}^{n-k} c_i w_i = 0$$

ונראה כי כל המקדמים חייבים להיות 0. נעביר אגף ונקבל:

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{k} a_i v_i + \sum_{i=1}^{l-k} b_i u_i}_{\in U} = \underbrace{\sum_{i=1}^{n-k} -(c_i w_i)}_{\in W}$$

כלומר צד ימין נמצא ב-W וגם שמאל נמצא ב-U, לכן נמצא בחיתוך בין שני המרחבים ($W \cap U$). אם הוא שייך לחיתוך אז ניתן להציגו כצירוף לינארי של בסיס למרחב, כלומר:

$$\sum_{i=1}^{k} a_i v_i + \sum_{i=1}^{l-k} b_i u_i = \sum_{i=1}^{k} d_i v_i$$

ולאחר איסוף נקבל:

$$\sum_{i=1}^{k} (a_i - d_i) v_i + \sum_{i=1}^{l-k} b_i u_i = 0$$

אבל $\{v_1 \dots v_k, u_1 \dots u_{l-k}\}$ הינה בסיס ל-U כלומר בת"ל ולכן $b_i = 0$ לכל $1 \le i \le l-k$.

בעזרת האיפוס הזה נראה $c_i = 0$ לכל $1 \le i \le n-k$ (נסביר אחרי ב-$(*)$ את $\sum_{i=1}^{l-k} b_i u_i$, מהווה הנמצאת $\{w_1 \dots w_{n-k}, v_1 \dots v_k\}$ בבסיס לכן נובע כי $c_i = 0$ לכל $1 \le i \le n-k$)

אם כן האגף הימני הוא 0 ולכן c_i:

אז נשאר עם: $\sum_{i=1}^{k} a_i v_i = 0$, ולכן ידוע כי $\{v_1 \dots v_k\}$ הינה בסיס ל-$U \cap W$ ולכן הם בת"ל ו-$a_i = 0$ לכל $1 \le i \le k$.

כלומר סה"כ המקדמים חייבים להיות אפס ולכן הווקטורים $\{v_1 \dots v_k, u_1 \dots u_{l-k}, w_1 \dots w_{n-k}\}$ מהווים קבוצה

1029 1031

מחברת מס' 1
מתוך 11 מחברות

TEL AVIV UNIVERSITY אוניברסיטת תל-אביב

36

לפני התחלת הבחינה מלא את כל הפרטים הבאים בכתב ברור וקרא בעיון את ההוראות:

1. על הנבחן להיבחן רק בחדר שבו הוא רשום.
2. עם הכניסה לחדר הבחינה יש להניח את החפצים בצד לרבות מכשירי קשר ואמצעי תקשורת אחרים כשהם כבויים.
3. אסור להחזיק בהישג יד, בחדר הבחינה או בסמוך לו, כל חומר הקשור לבחינה/לקורס פרט לחומר שהשימוש בו הותר בכתב על ידי המורה.
4. יש למלא את הפרטים על מחברת הבחינה במקום המיועד לכך בלבד. אין לכתוב את השם או כל פרט מזהה אחר בתוך המחברת.
5. יש להישמע להוראות המשגיח. נבחן לא יעתיק את מקומו ללא קבלת רשות המשגיח. הפונה בשאלה או בבקשה ירים את ידו.
6. נבחן שנכנס לחדר הבחינה וקיבל את השאלון (סופס הבחינה) לידו ייחשב כמי שנבחן במועד זה. היה והחליט לא לכתוב את הבחינה, לא יהא רשאי לעזוב את חדר הבחינה, אלא כעבור חצי שעה ממועד תחילתה ולאחר שהחזיר את המחברת והשאלון. ציונו בבחינה יהיה "0".
7. קריאת השאלון מותרת רק לאחר קבלת רשות המשגיח.
8. יש לכתוב את התשובות בעט, בכתב יד ברור ונקי. נבחן הבוחר לכתוב טיוטה יעשה זאת בעמודו הימני של דפי מחברת הבחינה ויציין בראש העמוד "טיוטה". אין לתלוש דפים מהמחברת.
9. מחברות הבחינה שקיבל הנבחן תהיינה בפיקוחו ובאחריותו במשך כל הבחינה. בעת יציאה מן החדר יופקדו המחברות והשאלון בידי המשגיח.
10. בתום הבחינה יחדיר הנבחן את המחברות והשאלון ויקבל מידי המשגיח את כרטיס הנבחן.
11. הסהג בניגוד להוראות ולי"נוהל סדרי בחינות ודיווח ציונים" צפוי להפסקת בחינתו ואף להעמדה לדין משמעתי.
12. אין לכתוב מעבר לקו האדום משני צידי הדף.

בהצלחה.

לשימוש המורה הבוחן:

הציון	100
המחברת נבדקה ביום	
חתימת המורה	

תאריך הבחינה 21/9/04
שם הקורס אל גברה לינארית
שם המורה יבורה שלום
החוג/המגמה מתמטיקה

מס' זיהוי
(העתק מכרטיס הנבחן/התלמיד)

66576

A-66

2 יהי F שדה ו- $A \in M_n(F)$.

נראה כי $\det A = \det A^t$ [כלומר שהדטרמינטה של A שווה לזו של המטריצה המוחלפת שלה].

ידוע כי $|A| = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}\sigma \cdot a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$

נוכיח כי $|A| = |A^t|$ ע"י הסתכלות כי הגורמים יקבלו אותם הערכים בסדר שונה.

A^t היא המטריצה המתקבלת מ- A ע"י הפיכת שורה לעמודה. כלומר $A = (a_{ij}) \Rightarrow A^t = (a_{ji})$

לכן:

$$|A^t| = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}\sigma \cdot b_{1\sigma(1)} \cdot b_{2\sigma(2)} \cdots b_{n\sigma(n)}$$

אם נסמן ב- A^t הוא כפלה A כאשר שורותיה הן העמודות ניתן לרשום כי $a_{\sigma(1),1} = b_{1\sigma(1)}$.

לכן:

$$|A^t| = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}\sigma \cdot b_{1\sigma(1)} \cdot b_{2\sigma(2)} \cdots b_{n\sigma(n)} =$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}\sigma \cdot a_{\sigma(1),1} \cdot a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n} =$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}\sigma \cdot a_{1,\sigma^{-1}(1)} a_{2,\sigma^{-1}(2)} \cdots a_{n,\sigma^{-1}(n)}$$

אך מאחר ו- σ^{-1} שונה אל מול σ נקבל את אותם הגורמים בסדר שונה (ומהווה את אותם בן אמן תמורות לכן הסימן שלהן שווה) הם בסדר שונה. לכן, לפי הגדרת הדטרמינטה הגורמים של $|A^t|$ ושל $|A|$ שווה

$$\det A = \det A^t$$

כלומר

$\operatorname{sign}\sigma = \operatorname{sign}\sigma^{-1}$

11

3. (15 נק') נתונה מערכת המשוואות הבאה מעל שדה הממשיים.

$$2(\lambda-1)x_1+(1-\lambda)x_2+(\lambda+1)x_3=\lambda$$

$$2(\lambda-1)x_1+(1-\lambda)x_2=\lambda-1$$

$$(2-\lambda-\lambda^2)x_1+(\lambda^2-1)x_2-(1+\lambda^2)x_3=-\lambda$$

רשמו לאלו ערכי λ למערכת:

א) יש אין-סוף פתרונות. תשובה: $1;0$

ב) אין אף פתרון. תשובה: -1

(רמז לבדיקה: קבוצת כל הערכים המתקבלים ב- א+ב מהווה סדרה חשבונית).

4. (15 נק') תהי $T:R_1[x]\to R_1[x]$ טרנספורמציית הגזירה.
יהיו $E=\{1,x\}$ $U=\{1+x,2+3x\}$ בסיסים ל- $R_1[x]$.
רשמו את המטריצות המייצגות את T ביחס לבסיסים אלו:

א) $[T]_E^E=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$

ב) $[T]_U^U=\begin{pmatrix}3&9\\-1&-3\end{pmatrix}$

ג) רשמו מטריצה (הפיכה) P המקיימת: $P^{-1}[T]_U^U P=[T]_E^E$

$P=\begin{pmatrix}3&-2\\-1&1\end{pmatrix}$

(שימו לב שניתן לבדוק ישירות את נכונות תשובתכם ב-ג')

ה) V מ"ו מעל שדה F. נתונים שני וקטורים שונים מאפס A ו-B שניהם בV. האם אפשר לבנות מטריצה C כך ש-A ו-B הם וקטורים עצמיים שלה?

- אם שבב עמודות, אז אי אפשר לבנות C כזו. וקטורים **חייבים** להיות בלתי תלויים לינארית. אם יש תלות לינארית, אפשר לבנות מטריצה אלכסונית C שבה הוקטורים הנתונים הם וקטורים עצמיים.

(ב) שיטה נכונה: קח אות וקטור מתחלף שאינו ב-A (אינו בבסיס) ← נקרא לבסיס B ב-B אברים. אם אין מספיק וקטורים מתחלפים ב-A, אז הוא לא בסיס.

סוף ← נעלם אחד מהם ב-A, נשאר אחד. נעלים עוד אחד ← Y.

אין נשאר

ד) V מ"ו מעל $\mathbb{Z}_p$. נתון שב-V יש וקטורים **חופשיים** לינארית. אם בבסיס 2 ← $V=8$ מ"ל

a, b

b a

הדרך הנכונה לספר איברים בקבוצה b ← a ו-b ← p^2 ו-p^4

$b \in$ שייכים לאותו בסיס. אם p^4

V מ"ל

b = (לפי איברים) נשארה

ה) V מ"ו מ"ל מעל F. T, S ו-S אינו 0. A, B מקיימים $ST = TS$ ← כל בסיס לבסיס הוא וקטור עצמי ל-V.

אם $AB = BA$

$TS = ST$; T^{-1}

$S = T^{-1}ST$

$T^{-1}\cdot S\cdot T(v) = 2S(v)$ / $\circ T$

$T\circ T^{-1}\circ S\circ T(v) = 2\circ T(v)$

$S\circ T(v) = 2T(v)$

$B\circ A = 2AB$

לא נכון!

8. יהיו V,W מ"ו מעל F , $T,S:V\to W$ ט"ל ו- $U\subseteq W$ ת"מ. אם:

$$\operatorname{Im}S\cap U=\{0\}\qquad \operatorname{Im}T+U=W$$

אזי מתקיים $\nu(T)\le\nu(S)$ $(\nu=\dim Ker)$

נכון

(ה)

(3) (2) (1)

כי $\dim \operatorname{Im} S \le \dim \operatorname{Im} T \Leftarrow \operatorname{Im}S\cap U=\{0\},\ \operatorname{Im}T+U=W$ $\Leftarrow(1)$

לפי משפט: $\dim \operatorname{Im} S \le$ $\overset{(2)}{\Leftarrow}$ וגם $\dim \operatorname{Im} T \ge \dim W-\dim U$

$\le \dim W - \dim U$

$\Leftarrow\begin{cases}\dim \operatorname{Im} T+\dim \ker T=\dim V\\ \dim \operatorname{Im} S+\dim \ker S=\dim V\end{cases}$

$1\quad \dim \operatorname{Im} T+\dim \ker T=\dim \operatorname{Im} S+\dim \ker S\ \Leftarrow$

$\dim \ker T \le \dim \ker S$ מ (3) נובע

9. יהי n טבעי כלשהוא, $F=Z_{31}$ שדה השאריות בחילוק ב- 31 ו- $A\in M_n(F)$. אם לכל $b\in F^{(n)}$ למערכת המשוואות $(A|b)$ יש פחות מ- 10 פתרונות, אזי לכל b יש למערכת הנ"ל לפחות פתרון אחד.

נכון

$rkA=n$ כי אם נניח $rkA<n$ אז המטריצה מדורגת

השקולה של A מכילה שורת אפסים, ולכן ל $b=\begin{pmatrix}\vdots\end{pmatrix}$ יש למערכת

כי יש לפחות משתנה חופשי 1

הנ"ל לפחות 31 פתרונות. אז בצורה המדורגת

~~ואז סגירה הגורמת~~ בכל שורה

של A תמיד יש איבר ~~[illegible]~~ בכל שורה, כלומר

זה אומר שלכל b שניתן יהיה פתרון יחיד לפחות

המוגדר על ידי $x_1=b_1'$ ... $x_n=b_n'$ כך b_i' מתקבלים

~~אחרי ביצוע אותן פעולות מספר על הערכים שלהם כי~~

(אולי לא) בכל שורה של A יש מקדם (לפחות אחד) שונה מ 0 בצורה המדורגת של A

ויש בבסיס של U לפחות וקטור 1 $\Leftarrow$ ב U לפחות 31 וקטורים

וכי אם U - מרחב הפתרונות של מערכת הומוגנית אז

$\dim U=n-rk$
$\ge n-(n-1)=$
$=1$

לשימוש הבודקים בלבד:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	סה"כ
15	17	15	15	8	8	7	8	8	100

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{\epsilon_2-\epsilon_1 \\ \epsilon_3-2\frac{1}{2}\epsilon_1}]{\frac{1}{2}\times(\epsilon_1)}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & -2\frac{1}{2} \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 & +5 \end{array}\right) \to \epsilon_2-\epsilon_3$$

$$-1 \quad -1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 & +5 \end{array}\right) \xrightarrow{\epsilon_3-\epsilon_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1 & 11 \end{array}\right)$$

$$1 \quad 0 \quad -\frac{1}{2} \quad -1 \quad -\frac{1}{2} \quad +3\frac{1}{2}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} & +3\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1 & -11 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & -1 & 9 \end{array}\right)$$

$$1 \quad 0 \quad 0 \quad \begin{pmatrix} -3 & -1 & -8 \\ 2 & 1 & 6 \\ -4 & -1 & -11 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} -3 & -1 & 9 \\ 2 & 1 & -6 \\ -4 & -1 & 11 \end{pmatrix}}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & -1 & 9 \\ 2 & 1 & 6 \\ -4 & -1 & -11 \end{pmatrix} = 1 \quad 0$$

$$\text{ICIC}$$

$$-15+4+12$$
$$-5+2+3$$
$$9-6+12$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & -1 & 9 \\ 2 & 1 & -6 \\ -4 & -1 & 11 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

$$-15+4+12 \qquad -6+6$$
$$-5+2+3 \qquad -2+3$$
$$45-12-33 \qquad -6+2+4$$
$$18-6-11$$

$$-2+1+1$$

$$1 \quad 0 \quad 0$$
$$0 \quad 1 \quad 0$$
$$0 \quad 0$$

$$\begin{pmatrix} -3 & -1 & 9 \\ 2 & 1 & -6 \\ -4 & -1 & 11 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$-15-2+11$$

מבוא

$\{v_i\}$ בסיס מ"ו $\to$ $\{\tilde{v}_i\}$ בסיס חדש

$b_{j_0 2} = a_{i_0 1}$

$b_{i_0 1} = a_{j_0 2}$

$\prod b_{i_0 1} b_{j_0 2} = a_{j_0 2} a_{j_0 1}$

$\prod \ldots a_{j_0 1} a_{j_0 2}$

$a_{12} a_{11}$

a_{22}

$\delta_{i_0} =$

$a_{i_0 1}$ $a_{j_0 2}$

$+ a_{11} \cdot a_{12}$

$a_{11} a_{22}$

$\operatorname{sgn}\delta$ $a_{11} A_{11}$

$b_{j_0 1}$ $a_{i_0 2}$

$a_{11} a_{12}$ a_{11} a_{ij}

$\operatorname{sgn}\delta \prod a_{11} a_{i\delta(i)}$

$\operatorname{sgn}\delta \prod b_{12} b_{i\delta(i)} = \prod a_{11} a_{i\sigma(i)}$

$j_0 1 = i_0$ $a_{j_0 2}$

$\delta(1) = 2$ $\delta(1) = 1$

$\delta(1) = 1$ $\prod \ldots a_{\delta(j_0) 1} a_{i_0(2)}$

$b_{j_0 1} = a_i$

$\operatorname{sgn}\delta' \prod_{i=1}^{n} b_{i\delta'(i)} = \operatorname{sgn}\delta' \prod_{i=1}^{n} a_{i\delta'(i)} = \prod_{i=1}^{n} a_{i\delta'(i)}$

для каждой перестановки δ' $a_{j_0 1} \cdot a_{j_0 2}$

$\delta(j_0) = 1$

$\delta(i_0) = 2$