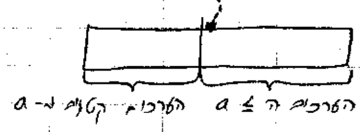
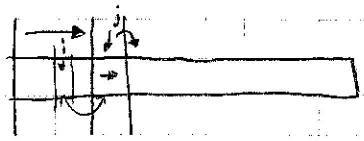
במהלך אלגוריתם ה"חמישיות" למציאת חציון t. נזדקק לשגרה Partition. שמקבלת חלק ממערך A[p...r] וערך (נניח a). (בדרך כלל אחד מאיברי המערך), ומחזירה סידור מחדש של איברי המערך ומקבלים כפלט את האינדקס i (שבו מתחיל החלק הימני).





Ⓐ אם האיבר גדול מ-a פשוט נזיז את המחוון j.
אם האיבר קטן מ-a, נחליף בין איבר i ו-j ונקדם את המחוונים j ,i.

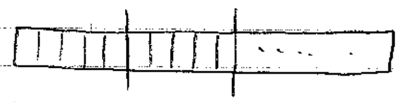
```
Partition (A[p...r], a)

  i ← p
  for j ← p to r
      do  if  A[j] < a
              then exchange A[i] ↔ A[j]
                   i ← i+1

  return i
```

נחזור לאלגוריתם ה"חמישיות"

<u>המטרה:</u> למצוא את האיבר ה-i בגודלו בתוך מערך נתון A[0...n-1]

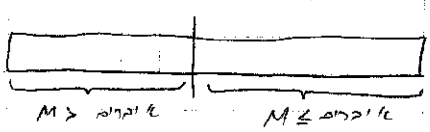
<u>שלבי האלגוריתם</u>

1. מחלקים את המערך לחמישיות



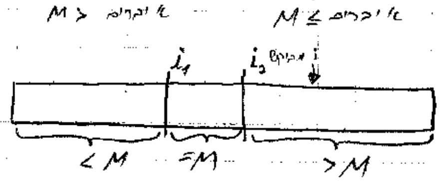
2. בכל חמישיה מוצאים את החציון (בדרך כלשהי).

3. ע"י קריאה רקורסיבית לאלגוריתם מוצאים את החציון M של החציונים. זה יהיה "חציון מקורב" של המערך כולו.



4. קוראים ל Partition(A[0...n-1], M).

ב. קוראים ל"גרסה" של Partition (כאשר > מוחלף ב ≥ : אז איברים = בחלק הימני) ומקבלים את המערך שמשמאל Ⓐ

Ⓐ 

<u>הגדרה:</u> $0 \le i \le n-1$ ומחפשים את B[i] אם B הוא מערך שהיה מתקבל ממיון של המערך A.
החציון הוא מה שמתקבל כאשר $i=\frac{n-1}{2}$. כאשר n הוא אי-זוגי ($i=\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor -1$
או $i=\lceil\frac{n-1}{2}\rceil$ כאשר n זוגי).

5. אם $i \ge i_2$ קוראים קריאה רקורסיבית לאלגוריתם למציאת איבר $i-i_2$ בגודלו במערך $A[i_2...n-1]$ ומחזירים את הערך שמצאנו.

אם $i_1 \le i < i_2$ מחזירים את M.

אם $i < i_1$ קוראים קריאה רקורסיבית למציאת האיבר ה i בגודלו במערך A[0,...i] ומחזירים את הערך שמצאנו.

תנאי עצירה של הרקורסיה כאשר המערך "קטן מספיק" (לצורך הניתוח (עצור כאשר המערך מכיל פחות מ- 24 איברים)

<u>ניתוח יעילות של האלגוריתם</u>

שלב 1: $\Theta(n)$

שלב 2: $\Theta(n)$ (יש $\lfloor \frac{n}{5} \rfloor$ חמישיות וכל אחת מהן $\Theta(1)$).

שלב 3: $\le T(\lfloor \frac{n}{5} \rfloor)$ (כאשר $T(n)$ זמן הריצה של האלגוריתם על קלט באורך n במקרה הגרוע)

שלב 4: $\Theta(n)$

שלב 5: $T(?)$

יש לנו $\lfloor \frac{n}{5} \rfloor$ חמישיות. $\lfloor \frac{n}{5} \rfloor \ge \frac{n-4}{5}$

אם $\lfloor \frac{n}{5} \rfloor$ אי זוגי אז מספר החציונים $\le M$ הוא $\ge \frac{\lfloor \frac{n}{5} \rfloor + 1}{5} \ge \frac{n+1}{10}$

אם $\lfloor \frac{n}{5} \rfloor$ זוגי אז מספר החציונים $\le M$ הוא לפחות $\frac{\lfloor \frac{n}{5} \rfloor}{2} \ge \frac{n-4}{10}$.

בכל מקרה, יש לפחות $\frac{n-4}{10}$ מחציונים $\le M$. לכן, במערך כולו יש לפחות $3 \cdot \frac{n-4}{10}$ איברים ש $\le M$ (כי אם חציון של חמישיה $\le M$ אז בחמישיה הזו יש לפחות 5 איברים ש $\le$ מ- M).

מכאן, מספר האיברים במערך ש $> M$ הוא לכל היותר $n - 3\frac{n-4}{10} = \frac{7}{10}n + \frac{12}{10}$. באופן דומה, מספר האיברים במערך ש $< M$ הוא לכל היותר $\frac{7}{10}n + \frac{12}{10}$, כלומר הסיבוכיות של שלב 5 היא לכל היותר $T(\frac{7}{10}n + \frac{12}{10})$.

לסיכום,

$$T(n) \le T(\tfrac{n}{5}) + T(\tfrac{7}{10}n + \tfrac{12}{10}) + \Theta(n) \quad \text{ל} \quad 24 \le n$$

<u>טענה:</u> $T(n) = O(n)$.

<u>הוכחה:</u> לפי הנוסחה שפיתחנו קיים קבוע c_1 כך שלכל $n \ge 24$:

$$T(n) \le T(\tfrac{n}{5}) + T(\tfrac{7}{10}n + \tfrac{12}{10}) + c_1 n \qquad n \ge 24$$

נקבע $C_2 = \max\{\frac{T(1)}{1}, \frac{T(2)}{2}, \dots, \frac{T(23)}{23}, 10c_1+1, 20c_1\}$.

נוכיח באינדוקציה של מה על n ש: $T(n) \le C_2 n$ לכל n

<u>בסיס האינדוקציה</u> $n \le 23$. לפי בחירת C_2 לכל $1 \le k \le 23$, $C_2 \ge \frac{T(k)}{k}$ כלומר $T(k) \le C_2 \cdot k$.

<u>מעבר האינדוקציה</u> יהי $n \ge 24$

$$T(n) \le T(\tfrac{n}{5}) + T(\tfrac{7}{10}n + \tfrac{12}{10}) + c_1 \cdot n \underset{\text{הנחת האינדוקציה}}{\le} C_2 \frac{n}{5} + C_2(\tfrac{7}{10}n + \tfrac{12}{10}) + c_1 n = c_1 \tfrac{9}{10}n + c_1 n + C_2 \tfrac{12}{10} \overset{?}{\le} C_2 n$$

$$\Rightarrow c_1 n + C_2 \tfrac{12}{10} \overset{?}{\le} C_2 \tfrac{n}{10} \Rightarrow C_2 \tfrac{12}{10} \overset{?}{\le} \underbrace{(\tfrac{C_2}{10} - c_1)}_{\text{חיובי לפי בחירת } C_2} \cdot n$$

כדי שזה יתקיים מספיק שיתקיים

$$c_2 \frac{12}{10} \overset{?}{\le} \left(\frac{c_2}{10}-c_1\right)\cdot 24$$

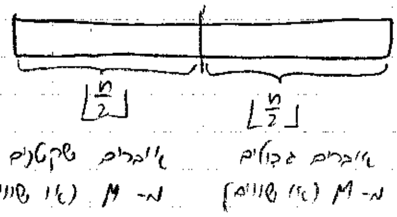
$$c_2 \overset{?}{\le} \left(\frac{c_2}{10}-c_1\right)20$$

$$c_2 \le 2c_2 - 20c_1$$

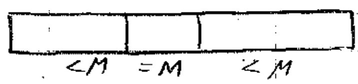
$$20c_1 \overset{?}{\le} c_2$$

Quick-Sort

1. נמצא את החציון M של המערך הנתון $A[0 \dots n-1]$
2. נבצע $Partition(A[0\dots n-1],M)$, נקבל מצב כזה



(למעשה קוראים ל Partition פעמיים, כמו באלגוריתם החציון ומקבלים



ושם מחלקים את המערך בדיוק באמצע).

3. קוראים רקורסיבית $QuickSort(A[0\dots\lfloor\frac{n}{2}\rfloor-1])$ $Quicksort(A[\lfloor\frac{n}{2}\rfloor\dots n-1])$ והמערך ממוין!

מה סיבוכיות האלגוריתם? $T(n) \le \underbrace{\theta(n)}_{1+2} + \underbrace{2T(\frac{n}{2})}_{3}$

(כמו ב- Merge Sort) ולכן $T(n)=O(n\log n)$.