2.7.06 (1)

אלגברה לינארית - תרגול 9

בתרגול הקודם מצאנו:

$$p_A(x)=(x+2)^2(x-2)^2$$

$$m_A(x)=(x+2)^2(x-2)^2$$

<u>שאלה מבחינה</u>

ג'רדן את

$$A=\begin{pmatrix}2&0&0&0&0\\-1&2&0&0&0\\1&0&2&0&0\\0&2&1&1&0\\1&-1&1&1&1\end{pmatrix}$$

$$p_A(x)=(x-2)^3(x-1)^2$$

<u>$\lambda=2$:</u> חישוב נותן ריבוי גיאומטרי 2.
לכן יש 2 בלוקים, אחד מגודל 1 ואחד מגודל 2.

<u>$\lambda=1$:</u> ריבוי גיאומטרי 1, לכן יש בלוק אחד מגודל 2.

<u>צורת ז'ורדן:</u>

$$\begin{pmatrix}\boxed{\begin{matrix}2&0\\1&2\end{matrix}}&&0\\&\boxed{2}&\\0&&\boxed{\begin{matrix}1&0\\1&1\end{matrix}}\end{pmatrix}$$

<u>נתחיל מ- $\lambda=2$:</u> $N=(A-2I)$ $\quad W_1=\ker N$

$$\begin{matrix}W_2 & 3\\ | & \\ W_1 & 2\\ | & \\ \{0\} & \end{matrix}$$

* הריבוי האלגברי הוא 3 ולכן המימד של W_2 הוא 3. הריבוי הגיאומטרי הוא 2 ולכן גם המימד של W_1.

* בדרך המקובלת אנו לוקחים וקטור v מ- W_1 (רק וקטור אחד כי זהו ההפרש בין המימדים) ופותרים את $Nx=v$. אבל אם ניקח סתם וקטור מ- W_1, בד"כ לא תהיה למשוואה פתרון. לכן נבצע את החישוב הבא:

<u>מחשבים:</u>

$$W_1=\{(0,2s-t,2t-s,3s,3t)\mid s,t\in\mathbb{R}\}$$

אנחנו רוצים וקטור v_2:

$$v_2=(0,2s-t,2t-s,3s,3t)\in W_1$$

(עבור s,t מסויימים) כך שיהיה פתרון למערכת $(A-2I)x=v_2$. הפתרון למערכת יהיה v_3 המבוקש. נדרג בעזרת את המטריצה והוקטור במערכת הבאה ונבדוק עבור אילו ערכים של s ו-t יש למערכת פתרון:

$$\overset{A-2I}{\left(\begin{array}{ccccc|c}0&0&0&0&0&0\\-1&0&0&0&0&2s-t\\1&0&0&0&0&2t-s\\0&2&1&-1&0&3s\\1&-1&1&1&-1&3t\end{array}\right)}\xrightarrow{\text{דרוג}}\left(\begin{array}{ccccc|c}1&0&0&0&0&2t-s\\0&2&1&-1&0&3s\\1&-1&1&1&-1&3t\\0&0&0&0&0&s+t\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right)$$

$s+t \rightarrow$ חייבים לקחת $s=-t$

אלגברה לינארית - תרגול 9

ואז (אחרי דירוג)

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3t \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -1 & -3t \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -2 & -3t \end{array}\right)$$

נקח $t=-1$ ונקבל פתרון $V_3=(-3,1,1,0,0)$ עבור $V_2=(0,3,-3,3,-3)$ $(NV_3=V_2)$

נבחר $V_1\in W_1$ שלא תלוי ב- V_2 למשל $V_1=(0,2,-1,3,0)$.

<u>בבית</u> לבדוק את כל החישובים ולמצוא את הוקטורים הקשורים לגוש השני (יש 2 כאלו).

* נשים לב שאם היה לנו גם מימד שלישי W_3, הפעלת השיטה המקודמת כנראה לא הייתה עובדת כי היינו צריכים לבחור וקטור מ- W_4 כך שיהיה פתרון למשוואה ב- W_2 ואז גם לוקטור הזה יהיה פתרון ב- W_3.

<u>בחינה</u> מתקיים ב- 30.7 (רביעי), תרגיל לפני בחינה יתקיים ב- 27.7 (ראשון).

<u>מרחבי מכפלה פנימית</u>

נקח $F=\mathbb{R}$ או $F=\mathbb{C}$. V מ"ו מעל F. מכפלה פנימית על V היא פונקציה המוגדרת $\langle\, ,\rangle : V\times V \longrightarrow F$ ומקיימת:

1. $0\le \langle u,u\rangle \in \mathbb{R}$ ו- $\langle u,u\rangle = 0 \iff u=0$.
2. $\langle u,\lambda v\rangle = \lambda\langle u,v\rangle$
3. $\langle u,v_1+v_2\rangle = \langle u,v_1\rangle + \langle u,v_2\rangle$
4. $\langle u,v\rangle = \overline{\langle v,u\rangle}$

<u>למשל</u> אם $F=\mathbb{R}$, $V=\mathbb{R}^n$ אז $\langle (x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n)\rangle = x_1y_1+x_2y_2+\dots x_ny_n$

<u>הגדרה</u> אם V מ"פ, $v\in V$, אזי $\|v\| = \sqrt{\langle u,v\rangle}$ נקרא הנורמה של V.
אם $V=\mathbb{R}^3$, $\langle\, ,\rangle$ מ"פ סטנדרטית אזי $\|(x,y,z)\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

u,v <u>ניצבים</u> (=אורתוגונלים) אם $\langle u,v\rangle = 0$.

<u>תרגיל</u> תהי $A\in M_n(\mathbb{R})$ כך שלכל $v\in\mathbb{R}^n$ מתקיים $\langle Av,v\rangle = 0$ (כאשר $\langle\, ,\rangle$ המכפלה הסטנדרטית). הוכח ש- A אנטי-סימטרית.

<u>פתרון</u> מתקיים: $0=\langle A(e_i+e_j), e_i+e_j\rangle = \langle Ae_i+Ae_j, e_i+e_j\rangle =$

$= \langle Ae_i+Ae_j, e_i\rangle + \langle Ae_i+Ae_j, e_j\rangle = \underbrace{\langle Ae_i,e_i\rangle}_{=0} + \langle Ae_j,e_j\rangle + \langle Ae_i,e_j\rangle + \underbrace{\langle Ae_j,e_j\rangle}_{=0}$

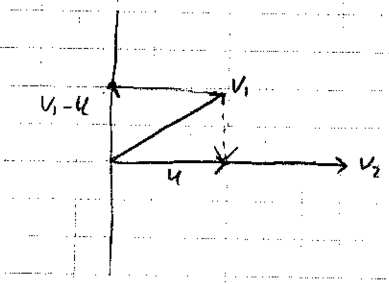
$= \langle Ae_j,e_i\rangle + \langle Ae_i,e_j\rangle = \langle a_j,e_i\rangle + \langle a_i,e_j\rangle = a_{ij} + a_{ji}$

$$Ae_j = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0\\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | \\ a_j \\ | \end{pmatrix} \qquad (\alpha_1,\dots,\alpha_n)(0\dots 0,1,0\dots 0) = \alpha_i$$

לכן, $a_{ij}+a_{ji}=0 \Leftarrow a_{ij}=-a_{ji}$ לכל i, j, כלומר $A=-A^t$.

תהליך גרם - שמידט

נתון בסיס $v_1,\dots,v_n$ ל-V ורוצים לייצר ממנו בסיס אורתוגונלי $v_1,\dots,v_n$ ל-V.



u הוא ההיטל האורתוגונלי של v_1 על v_2.

לאחר מכן נחשב את הוקטור v_1-u, הוא ניצב ל-v_2.

אם $u_1,\dots,u_n$ קבוצה אורתוגונלית אזי ההיטל של v על $sp\{u_1,\dots,u_n\}$

$$\left(\frac{\langle v,u_1\rangle}{\langle u_1,u_1\rangle}\right)u_1+\left(\frac{\langle v,u_2\rangle}{\langle u_2,u_2\rangle}\right)u_2+\dots+\left(\frac{\langle v,u_n\rangle}{\langle u_n,u_n\rangle}\right)u_n$$

<u>גרם שמידט</u> נתונה $\{v_1,\dots,v_n\}$ ורוצים לייצר $\{v_1',\dots,v_n'\}$. נניח שכבר "ייצרנו" $\{v_1',\dots,v_j'\}$ כך ש $\{v_1',\dots,v_j'\}$ בסיס אורת' ל- $sp\{v_1,\dots,v_j\}$ אז נגדיר

$$v_{j+1}'=v_{j+1}-\left(\text{ההיטל האורת' של } v_{j+1} \text{ על } sp\{v_1,\dots,v_j\}\right)$$

<u>תרגיל</u> מצא בסיס אורתוגונלי ל- $U=sp\{\underbrace{(2,2i,2)}_{v_2},\underbrace{(2+2i,0,4)}_{v_1}\}\subseteq\mathbb{C}^3$ (כמה לשים סדר)

נחשב את ההיטל האורת' של v_2 על $v_1'=v_1$.

$$\frac{\langle v_2,v_1'\rangle}{\langle v_1',v_1'\rangle}v_1'=\frac{\langle(2+2i,0,4),(2,2i,2)\rangle}{\langle(2,2i,2),(2,2i,2)\rangle}\cdot v_1' \circleddash$$

<u>תזכורת:</u> $\langle(x,y,z),(x',y',z')\rangle=\bar{x}\cdot x'+\bar{y}\cdot y'+\bar{z}\cdot z'$

$$\circleddash\ \frac{(2-2i)2+4\cdot 2}{4+(-2i)(2i)+4}\cdot v_1'=\frac{12-4i}{12}\cdot v_1'=\left(1-\frac{i}{3}\right)v_1'=\left(1-\frac{i}{3}\right)(2,2i,2)=u$$

מצאנו את ההיטל.

נגדיר $v_2'=v_2-u$. בבית תוודאו ש v_1', v_2' ניצבים (כלומר המכפלה שלהם אפס).

לכן $\{v_1',v_2'\}$ בסיס אורת' ל- $sp\{v_1,v_2\}$.