שיטת מציאת צורת ז'ורדן

נניח $A\in M_n(F)$ שפולינום המין המתפרק למכפלה של גורמים לינאריים, אזי עבור ע"ע λ מתקיים:

I. סכום סדרי הבלוקים המתאימים לע"ע λ הוא הריבוי האלגברי שלו.

II. מס' הבלוקים הוא הריבוי הגיאומטרי של λ.

III. גודל הבלוק הגדול ביותר המתאים ל-λ הוא הריבוי של $(x-\lambda)$ בפולינום המינימלי.

IV. מספר הבלוקים מגודל i הוא:

לא נוכיח אבל צריך לזכור

$$-\dim\ker(A-\lambda I)^{i-1}+2\dim\ker(A-\lambda I)^{i}-\dim\ker(A-\lambda I)^{i+1}$$

תרגיל

מצא צורת ז'ורדן של $A=\begin{pmatrix}-2&0&0&0\\-1&1&0&0\\0&-1&0&-1\\1&1&1&2\end{pmatrix}$ מעל $\mathbb{R}$.

פתרון: מחשבים פולינום אופייני ויוצא $(x+2)(x-1)^3$.
לכן לע"ע (-2) יש בלוק אחד מגודל 1.
מחשבים פולינום מינימלי ויוצא $(x+2)(x-1)^2$. לכן, גודל הבלוק המקסימלי של 1 הוא 2, לכן, יש 2 בלוקים שמתאימים לו, אחד מגודל 2 ואחד מגודל 1.

* אם הפולינום מתפרק לגורמים לינאריים אז גם המינימלי! ויש צורת ז'ורדן.

מכאן, צורת ז'ורדן של המטריצה:

$$\begin{pmatrix}\boxed{-2}&0&0&0\\0&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&0&\boxed{1}\end{pmatrix}$$

תרגיל

מצא צורת ז'ורדן של המטריצה הבאה:

$$A=\begin{pmatrix}-3&1&-1&&&&&\\-7&5&-1&&&&&\\-6&6&-2&&&&&\\&&&4&0&1&&\\&&&0&1&0&&\\&&&0&0&4&&\\&&&&&&-1&-1\\&&&&&&1&-3\end{pmatrix}\in M_8(\mathbb{R})$$

* עבור מטריצת בלוקים, הפולינום האופייני הוא מכפלת הפולינומים האופייניים של הבלוקים, והמינימלי הוא ה lcm של המינימליים של הבלוקים.

מחשבים ויוצא:

$$f_{A_1}(x)=m_{A_1}(x)=(x+2)^2(x-4)$$
$$f_{A_2}(x)=m_{A_2}(x)=(x-1)(x-4)^2$$
$$f_{A_3}(x)=m_{A_3}(x)=(x+2)^2$$

$$f_A(x)=f_{A_1}(x)f_{A_2}(x)f_{A_3}(x)=(x+2)^4(x-4)^3(x-1)$$
$$m_A(x)=lcm(m_{A_1}(x),m_{A_2}(x),m_{A_3}(x))=(x+2)^2(x-4)^2(x-1)$$

<u>לע"ע 1 יש ריבוי אלג' 1</u> $\Leftarrow$ יש בלוק 1 מגודל 1.

<u>לע"ע 4 יש ריבוי אלג' 3</u> $\Leftarrow$ יש בלוק מגודל 2

ולפי סכום הגדלים של 3 $\Leftarrow$ יש בלוק מגודל 2 ובלוק מגודל 1.

25.6.08 (2)

אלגברה לינארית 2 - תרגול

לכל (2-) יש ריבוי אלג' 4 וגם הבלוק הכי גדול הוא 2, לכן האפשרויות הן 2,2 או 2,1,1. הריבוי הגאומטרי הוא 2 ולכן יש 2 בלוקים המתאימים ל-2-, לכן האפשרות הנכונה היא 2,2.

לכן צורת ז'ורדן:

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & & & & & & & \\ & 4 & 0 & & & & & \\ & 1 & 4 & & & & & \\ & & & \boxed{4} & & & & \\ & & & & -2 & 0 & & \\ & & & & 1 & -2 & & \\ & & & & & & -2 & 0 \\ & & & & & & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

<u>דוגמא נוספת:</u> מצא צורת ז'ורדן של A.

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & & & & \\ -2 & 1 & & & & \\ & & -1 & 0 & 0 & \\ & & 1 & -1 & 0 & \\ & & 1 & 1 & 3 & \\ & & & & & 3 \end{pmatrix} \in M_6(\mathbb{R})$$

<u>פתרון:</u> מחשבים פולינומים:

$$f_{A_1}(x) = m_{A_1}(x) = (x+1)^2$$

$$f_{A_2}(x) = m_{A_2}(x) = (x+1)^2(x-3)$$

$$f_{A_3}(x) = m_{A_3}(x) = (x-3)$$

$$f_A(x) = (x+1)^4(x-3)^2$$

$$m_A(x) = (x+1)^2(x-3)$$

<u>לכן</u> לכל 1- יש בלוק מגודל 2 וסכום סדרי הבלוקים הוא 4. הריבוי הגאומטרי הוא 2, לכן יש 2 בלוקים מגודל 2.

לכל 3 יש 2 בלוקים מגודל 1. צורת ז'ורדן:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & & & & \\ 1 & -1 & & & & \\ & & -1 & 0 & & \\ & & 1 & -1 & & \\ & & & & \boxed{3} & \\ & & & & & \boxed{3} \end{pmatrix}$$

<u>תרגיל:</u> חשב צורת ז'ורדן של:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_7(\mathbb{R})$$

<u>פתרון:</u> מחשבים פולינום אופייני ומקבלים $f_A(x) = x^7$ ופולינום מינימלי $m_A(x) = x^3$.

הריבוי הגאומטרי של 0 הוא 3, לכן יש 3 בלוקים מגודל 3 לכל היותר. לפחות אחד מגודל 3 בדיוק וסכום הסדרים 7. לכן האפשרויות: 3,2,2 או 3,3,1.

כדי להכריע בין האפשרויות נשתמש בכלל III. מספר הבלוקים מסדר 3 הם:

$$-\dim(\ker A^2) + 2\dim(\ker A^3) - \dim(\ker A^4)$$

נשים לב (שבגלל הפולינום המינימלי) $A^3 = 0 \Rightarrow \dim\ker A^3 = 7$. לכן מס' הבלוקים:

$$-\dim(\ker A^2) + 7 \underset{\text{חישוב}}{=} -6 + 7 = 1$$

לכן יש בלוק 1 מגודל 3.

ולכן צורת ז'ורדן היא:

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{matrix}} & & 0 \\ & \boxed{\begin{matrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{matrix}} & \\ 0 & & \boxed{\begin{matrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

איך מוצאים את המטריצה המז'רדנת P:

אנחנו רוצים P הפיכה, כך ש- $P^{-1}AP = \underset{\text{צורת ז'ורדן}}{J}$.

לכל ע"ע λ נמצא n_λ (= הריבוי האלגברי של λ) וקטורים "שייקשרו אליו" - כי הוקטורים האלו ביחד יהיו עמודות של P.

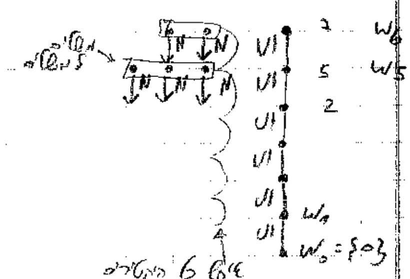
נניח λ ע"ע, נסמן $N = A - \lambda I$. נסמן ב-l את החזקה של $(x-\lambda)$ בפולינום המינימלי. נגדיר $W_j = \ker(N^j)$, לכל $0 \le j \le l$.

שימו לב ש- $W_{l-1} < W_l$ (כי אם $N^{j-1}v = 0$ אז גם $N^j v = N(N^{j-1}v) = N \cdot 0 = 0$)

כלומר, $W_0 \subseteq W_1 \subseteq \dots W_l$.

האלגוריתם:

- יהי B_l משלים לבסיס של W_l ביחס ל-W_{l-1}.
- עבור $j=l$ עד $j=1$:
  השלם את $N(B_j)$ לקבוצה B_{j-1} כך ש-B_{j-1} משלים לבסיס של W_{j-1} ביחס ל-W_{j-2}.
- החזר את $B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_l$.



(*) ניקח וקטור שמקיים ל-N^8, כלומר $N^8 v = 0$ אזי $N^7(Nv) = 0$ כלומר אם $v \in W_8 \Leftarrow Nv \in W_7$. בדוגמה שלנו, לקחנו 2 וקטורים מ-W_6 המשלימים את הבסיס של W_5 לבסיס של W_6. הפעלנו עליהם את N ואליהם הוספנו עוד וקטורים מ-W_5 כך שתיווצר קבוצה שמשלימה את הבסיס של W_4 ל-W_5 וכך הלאה.

(*) מובטח שלא יקרה מצב שצריך "לזרוק" וקטורים שהפעלנו עליהם את N, וכן לא יהיה מצב שוקטורים אלו כבר יהיו משלים לבסיס ולא יהיה צריך להוסיף להם עוד.

25.6.08

(1)

אלגברה לינארית 2 - תרגול

<u>תרגיל:</u> ג'רדן את A (מצא את הבסיס המג'רדן ואת צורת ז'ורדן).

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\-16&0&8&0\end{pmatrix}$$

<u>פתרון:</u> פולינום אופייני ומינימלי: $(x+2)^2(x-2)^2$

צורת ז'ורדן:
$$\begin{pmatrix}\boxed{\begin{matrix}2&0\\1&2\end{matrix}}&0\\0&\boxed{\begin{matrix}-2&0\\1&-2\end{matrix}}\end{pmatrix}$$

<u>עבור $\lambda=2$:</u> נסמן $N=A-2I$

$W_1=\ker(A-2I)$, $W_2=(A-2I)^2$

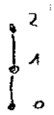
לאחר חישוב ודירוג קיבלנו

$W_1=\{(\frac{1}{8}t,\frac{1}{4}t,\frac{1}{2}t,t)\mid t\in\mathbb{R}\}$

$W_2=\{(\frac{3s-t}{4},\frac{4s-t}{4},s,t)\mid t,s\in\mathbb{R}\}$

לכן,

$W_1=\mathrm{span}\{(1,2,4,8)\}$



ניקח וקטור ב-W_2 שמשלים בסיס ל-W_1, לדוגמה $V=(3,4,4,0)$.
מחשבים $Nv=(-2,-4,-8,-16)$.

לכן הוקטורים $(-2,-4,-8,-16)$, $(3,4,4,0)$ יהיו 2 וקטורים ב-P.

<u>עבור $\lambda=-2$</u> נסמן $N=A+2I$ ויצא ש $\dim W_1=1$ ו $\dim W_2=2$.
עושים את אותו תהליך ומקבלים את הוקטורים $V=(3,-4,4,0)\in W_2$, $N_V=(2,-4,8,-16)\in W_1$
ואז המטריצה המג'רדנת היא:

$$P=\begin{pmatrix}3&-2&3&2\\4&-4&-4&-4\\4&-8&4&8\\0&-16&0&-16\end{pmatrix}$$

<u>בבית</u> תבדקו את כל החישובים ותוודאו $P^{-1}AP=J$.