18.6.08 ①

אלגברה לינארית - תרגול

<u>תרגיל</u> חבר א' הפרק

א. A לכסינה $\Rightarrow$ A^m לכסינה לכל $m \geq 1$.

ב. A^m לכסינה עבור איזשהו $m \geq 1$ $\Rightarrow$ A לכסינה.

<u>פתרון:</u>

א. כן - כי אם $A = P^{-1}DP$ (D אלכסונית) אזי $A^m = P^{-1}D^mP$ אלכסונית

ב. לא. דוגמא נגדית: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ מעל $\mathbb{R}$ אזי $P_A(x) = \begin{vmatrix} x & -1 \\ 1 & x \end{vmatrix} = x^2+1$

אין ע"ע, לכן A לא לכסינה. אבל $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{\text{לכסינה}}$

ג. נניח $A \in M_n(\mathbb{C})$ לא-הפיכה, אזי אם קיים $m \geq 1$ כך ש A^m לכסינה, אזי A לכסינה.

<u>הוכחה:</u> נסמן ב $g(x)$ את הפולינום המינימלי של A^m אזי $g(x) = \prod_{i=1}^{n}(x - z_i)$

כאשר $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ שונים זה מזה. $g(A^m) = \prod_{i=1}^{n}(A^m - zI) = 0$

כלומר A מאפסת את הפולינום $\prod_{i=1}^{n}(x^m - zI)$ (A הפיכה לכן $z_i \neq 0$).

למשוואה $x^m = zI$ יש m פתרונות (אם $z_i = re^{i\theta}$ אזי $\sqrt[m]{r}\, e^{i\frac{\theta k}{m}}$

כאשר $k = 0, 1, \dots, m-1$. אלו m פתרונות שונים).

לכן $x^m - z_i = \prod_{j=1}^{m}(x - z_{ij})$ כאשר $z_{i1}, \dots, z_{im}$ שונים.

ומכאן, $h(x) = \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}(x - z_{ij})$.

אם $i \neq j$ אזי $z_{ij} = z_{i'j'}$ כי אחרת $z_i = z_{ij}^m = z_{i'j'} = z_{i'}$

סתירה!

A מאפסת את h, לכן הפולינום המינימלי שלה m מחלק את h, לכן m מתפרק למכפלת גורמים לינאריים שונים.

מש"ל

<u>תרגיל:</u> $A \in M_n(F)$, $n \geq 2$, $rkA = 1$, $tr(A) = 0$. מה הפולינום האופייני של A?

<u>טענה:</u> A אינה לכסינה. נניח בשלילה ש $A = P^{-1}DP$ כאשר D אלכסונית אזי

$rk D = rk A = 1$, $tr D = tr A = 0$

לכן $D = \begin{pmatrix} a & & \\ & 0 & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$, $a \neq 0$ אבל $0 = trA = a$. <u>סתירה!</u>

18.6.08 ②

אלגברה לינארית 2 - תרגול

0 הוא ע"ע של A, כי $rk(A-0I)<n$, לכן 0 ע"ע, הריבוי הגיאומטרי $n-rk(A-0I)=n-1$,
לכן האלגברי הוא n או $n-1$.

אם הריבוי הזה הוא $n-1$ אז הפולינום האופייני $(x-\alpha)x^{n-1}$, $(\alpha\neq 0)$
ולכן המטריצה תהיה לכסינה (הריבוי האלגברי והגיאומטרי של α ו-0 שווים). זו סתירה לנתונה.
לכן הריבוי הזה של 0 הוא n $\Leftarrow$ $\boxed{f_A(x)=x^n}$,

<u>תרגיל:</u>

$V=M_2(\mathbb{R})$, $T:V\to V$ נתונה ע"י $T(X)=\begin{pmatrix}1&0\\2&3\end{pmatrix}X$. בדוק האם T לכסינה.

<u>פתרון:</u> נכתוב את $[T]_E$ $\quad E=\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right)$

$$T\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\2&0\end{pmatrix}\Rightarrow\left[T\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\right]_E=\begin{pmatrix}1\\0\\2\\0\end{pmatrix}$$

באופן דומה מחשבים את שאר וקטורי הקואורדינטות ונקבל:

$$[T]_E=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\2&0&3&0\\0&2&0&3\end{pmatrix}$$

⊕ מה נשאר לבדוק האם המטריצה המייצגת לכסינה. את הפולינום האופייני רואים ישר כי המטריצה משולשת.

מחשבים פול' אופייני: $(x-1)^2(x-3)^2$ ובודקים שהריבויים הגאומטריים של 3 ו-1 הם 2
ולכן T לכסינה.

<u>משפט הפירוק הפרימרי</u>

אם A מטריצה $n\times n$, ו-$g(x)$ הפולינום המינימלי שלה, נכתוב את g כך: $g(x)=g_1^{e_1}(x)\cdot g_2^{e_2}(x)\cdots g_m^{e_m}(x)$
כאשר הפולינומים $g_1,\dots,g_m$ אי פריקים וזרים.

אם B מטריצה נסמן $\ker B=\{v\mid Bv=0\}$ (כי אם נסתכל בהעתקה $v\mapsto Bv$
אז הגרעין שלה הוא $\{v\mid Bv=0\}$).

נסמן $V_i=\ker(g_i(A)^{e_i})$ אזי $V=V_1\oplus V_2\oplus\dots\oplus V_m$.

<u>דוגמה:</u> $A=\begin{pmatrix}1&-1&-2&-4\\4&0&11&5\\1&0&5&3\\-1&0&-4&-2\end{pmatrix}$ מעל $\mathbb{R}$. מצא פירוק פרימרי המתאים ל-A.

<u>פתרון:</u> $f_A(x)=x^4-4x^3+7x^2-6x+2=\underbrace{(x^2-2x+2)}_{\text{אי פריק}}\underbrace{(x-1)^2}_{g_2^2}$

(יוצא גם מינימלי)

$$V_1=\ker(g_1(A))=\ker(A^2-2A+2)=\ker\begin{pmatrix}-1&1&-3&1\\2&-2&5&-3\\1&-1&3&-1\\-1&1&-2&2\end{pmatrix}\underset{\text{דירוג}}{=}Sp\{(1,1,0,0),(-1,3,1,-1)\}$$

18.6.08 (3)

אלגברה לינארית 2 - תרגול

$$V_2 = \ker\left((A-I)^2\right)$$

$$\mathbb{R}^4 = \underbrace{V}_{4} = \underbrace{V_1}_{2} \oplus \underbrace{V_2}_{\Rightarrow 2} \quad \text{מימד}$$

אזי בשביל למצוא בסיס ל- V_2 צריך למצוא 2 וקטורים בת"ל v,w כך ש:

$$(A-I)^2 w = 0 \qquad (A-I)^2 v = 0$$

ניקח $v \neq 0$ כך ש $(A-I)v = 0$ למשל: $v = (-1,2,1,-1)$ פתרון.

אזי: $(A-I)v = 0 \Rightarrow (A-I)^2 v = (A-I)(A-I)v = (A-I)\cdot 0 = 0$.

!!! טריקים חשובים!!

נמצא w כך ש $(A-I)w = v$ (כי אז $(A-I)^2 w = (A-I)v = 0$), שימו לב

ש v,w בת"ל כי אם $v = \alpha w$ אזי $(A-I)w = (A-I)(\frac{1}{\alpha}v) = \frac{1}{\alpha}(A-I)v = 0 \neq v$.

$$(A-I)w = v \qquad\qquad (A-I)^2 w = 0$$

$$\begin{array}{ccc} w & & \ker(A-I)^2 \\ {\scriptstyle A-I}\big\downarrow & & \cup \\ v & \in & \ker(A-I) \end{array}$$

ע"י פתרון מערכת $(A-I|x) = v$ מקבלים $w = (0,-1,0,1)$.

לכן $V_2 = sp\{v,w\}$ וגם, הפירוק הפרימרי $\mathbb{R}^4 = V_1 \oplus V_2$.

צורת ז'ורדן

אם $\lambda \in F$ המטריצה $J_m(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ 1 & \ddots & \\ 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}_m$ נקראת בלוק ז'ורדן מסדר m השייך ל-λ.

מטריצה מהצורה $\begin{pmatrix} J_{m_1}(\lambda_1) & & 0 \\ & J_{m_2}(\lambda_2) & \\ 0 & & \ddots \end{pmatrix}$ נקראת מטריצת ז'ורדן.

למשל:

$$\begin{pmatrix} 2&0&0\\1&2&0\\0&1&2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}2&0\\1&2\end{matrix}} & 0 \\ 0\ \ 0 & \boxed{2} \end{pmatrix} \xleftrightarrow{\text{שונות}} , \quad \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}2&0\\1&2\end{matrix}} & 0 \\ 0\ \ 0 & \boxed{3} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}2&&\\1&2&\\&1&2\end{matrix}} & & \\ & \boxed{2} & \\ & & \boxed{\begin{matrix}3&\\1&3\end{matrix}} \end{pmatrix}$$

וכו'

משפט: אם הפולינום המינימלי של A מתפרק למכפלה של גורמים לינאריים, אזי A דומה למטריצת ז'ורדן. בפרט, כל מטריצה מעל $\mathbb{C}$ דומה למטריצת ז'ורדן.

* נשים לב שבאופן כללי,

$$\begin{pmatrix} J_1 & & \\ & J_2 & \\ & & J_3 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} J_1^n & & \\ & J_2^n & \\ & & J_3^n \end{pmatrix}$$

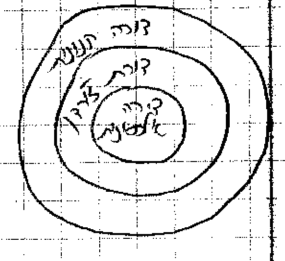
וכן,

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & 0 \\ n\lambda^{n-1} & \lambda^n \end{pmatrix}$$

אם $A \in M_n(\mathbb{C})$ ורוצים לחשב A^{1000}, אזי נמצא P כך ש $A = P^{-1}JP$ ואז $A^{1000} = P^{-1}J^{1000}P$.

18.6.08
(4)

אלגברה לינארית - תרגול



מ.ה כנראה שלא יתנו לחשב במבחן מטריצה של מצורת ז'ורדן (או אלכסונית) לכן, מבחינה פרקטית חשוב להתמקד בצורת ז'ורדן.

<u>משפט</u>: <u>כל שדה</u> מוכל בשדה סגור אלגברית, לכן <u>לכל</u> מטריצה מעל <u>כל שדה</u> יש צורת ז'ורדן (צריך אולי להסתכל עליה מעל שדה גדול יותר).