11.6.08 ①

אלגברה לינארית - תרגול 6

<u>תרגיל:</u> חשב A^{100} עבור $A=\begin{pmatrix}-1&3&-1\\-3&5&-1\\-3&3&1\end{pmatrix}$

שימו לב שאם A דומה ל- B, כלומר קיימת P הפיכה כך ש $B=P^{-1}AP$ אזי:

$$B^n=(P^{-1}AP)^n=\underbrace{P^{-1}APP^{-1}AP\cdots P^{-1}AP}_{n\text{ פעמים}}=P^{-1}A^nP$$

נלכסן את A, פולינום אופייני: $P_A(x)=(x-2)^2(x-1)$

נחשב את V_2 כלומר מרחב הפתרונות למערכת $(A-2I)x=0$:

$$\begin{pmatrix}-3&3&-1\\-3&3&-1\\-3&3&-1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}3&-3&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow V_2=\{(s,t,3t-3s)\mid t,s\in\mathbb{R}\}$$
$$=sp\{(1,0,-3),(0,1,3)\}$$

אזי $\dim V_2=2$ לכן הריבוי הגיאומטרי 2 בפרט כבר נובע ש A לכסינה.

נחשב את המרחב העצמי של 1:

$$\begin{pmatrix}-2&3&-1\\-3&4&-1\\-3&3&0\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow V_1=\{(t,t,t)\mid t\in\mathbb{R}\}=sp\{(1,1,1)\}$$

<u>תזכורת:</u> המטריצה המלכסנת P תהיה כזו שעמודותיה הן בסיס של ו"ע של $\mathbb{R}^3$ לכן במקרה שלנו:

$$P=\begin{array}{c}\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\1&-3&3\end{pmatrix}\\ \begin{matrix}v_1&v_2&\end{matrix}\end{array}$$

מחשבים:

$$P^{-1}AP=\overbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}}^{D}\Rightarrow(P^{-1}AP)^{100}=D^{100}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2^{100}&0\\0&0&2^{100}\end{pmatrix}$$

$$\Leftarrow\quad A^{100}=P\cdot\begin{pmatrix}1&&\\&2^{100}&\\&&2^{100}\end{pmatrix}\cdot P^{-1}$$

<u>תרגיל:</u> $A\in M_{10}(\mathbb{R})$, $A^2=I$, $trA=6$. חשבו $m_A(x)$, $P_A(x)$.

<u>פתרון:</u> $A^2-I=0$, כלומר A מאפסת $(x+1)(x-1)=x^2-1$.

<u>תזכורת:</u> $g(A)=0 \Leftrightarrow m_A(x)|g(x)$, לכן

$$m_A(x) = \cancel{1},\ x+1,\ x-1,\ (x+1)(x-1)$$

<u>תזכורת:</u> מטריצה A לכסינה $\Leftrightarrow$ הפולינום המינימלי של A מתפרק למכפלה של גורמים לינאריים שונים.

במקרה שלנו, הפולינום המינימלי מתפרק למכפלה של גורמים לינאריים שונים. לכן המטריצה לכסינה והערכים העצמיים הם 1 או -1 (או שניהם).
מכאן, הצורה הלכסינית היא:

$$D = \begin{array}{c} a\left\{\begin{array}{c}\\ \\ \end{array}\right. \\ 10-a\left\{\begin{array}{c}\\ \\ \end{array}\right. \end{array}\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & \ddots -1 \end{pmatrix}$$

<u>תזכורת:</u> למטריצות דומות יש אותה עקבה. לכן $tr(D)=tr(A)=6$.

מכאן,

$$trD = 1\cdot a + (10-a)\cdot(-1) = 6$$

$$2a-10=6 \Rightarrow 2a=16 \Rightarrow \boxed{a=8}$$

לכן, הצורה הלכסינית היא:

$$\begin{array}{c} 8\text{ פעם}\left\{\begin{array}{c}\\ \\ \end{array}\right. \\ \text{פעמיים}\left\{\begin{array}{c}\\ \end{array}\right. \end{array}\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \Leftarrow$$

הפולינום האופייני: $(x-1)^8(x+1)^2$

והפולינום המינימלי: $(x-1)(x+1)$

<u>מש"ל</u>

<u>משפט:</u> למטריצות דומות אותו פולינום מינימלי.

<u>הוכחה:</u> נניח A מטריצה, ונניח ש- $g(x)$ פולינום כך ש $g(A)=0$. תהי B מטריצה שדומה ל- A , כלומר $B=P^{-1}AP$.

נרשום $g=\sum g_i x^i$, אזי:

$$g(B)=\sum g_i B^i \Rightarrow P\,g(B)P^{-1}=\sum g_i P B^i P^{-1}=\sum g_i (PBP^{-1})^i=\sum g_i (A)^i=g(A)=0$$

$\Leftarrow$ $g(B)=0$ (אם נכפול ב P^{-1} ו- P בהתאמה).

כלומר, קיבלנו שאם A ו- B מטריצות דומות, אזי A מאפסת פולינום מסוים $\Leftarrow$ B מאפסת אותו. בפרט, $m_A(B)=0$, $m_B(A)=0$.

<u>תזכורת:</u> פולינום מתאפס ע"י מטריצה $\Leftrightarrow$ הוא מתחלק בפולינום המינימלי שלה.

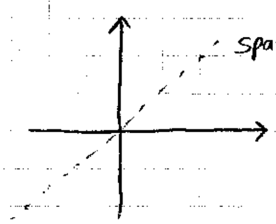
$\Leftarrow$ $m_B | m_A$ וגם $m_A | m_B$ $\Leftarrow$ $m_A=m_B$ (כיוון שהם מתוקנים הם שווים ממש).

11.6.08 ③

אלגברה לינארית - תרגול 6

<u>תזכורת</u>: אם $T:V\to V$ העתקה לינארית, $U\subseteq V$ נקרא תת מרחב שמור ע"י T - אם $T(U)\subseteq U$. (T שמור).

<u>דוגמא</u>: $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $T(x,y)=(y,x)$



T שמור ⇐ $span\{(1,1)\}$

ציר x ו- y לדוגמא אינם T שמורים (כי ציר x הופך להיות ציר y ולהפך).

<u>תרגיל</u> ← 6 ק

יהי V מ"ו מעל שדה F, $W\subseteq V$ T-שמור ונניח ש $f,g\in F[X]$

א. הוכח ש W הוא $g(T)$-שמור.

ב. הוכח ש $f(T)(W)$ הוא $g(T)$-שמור.

ג. הוכח שאם $V=W_1\oplus\dots\oplus W_r$, כאשר W_i תת מרחבים, שהם T-שמור, אזי:

$$f(T)(V)=f(T)(W_1)\oplus\dots\oplus f(T)(W_r)$$

<u>פתרון</u>:

א. נסמן $g(x)=\sum g_ix^i$. שימו לב שאם $T(w)\in W$ אזי $T^2(w)\in W$ ובאופן דומה, $T^i(w)\in W$ לכל i. לכן אם $w\in W$ אזי

$$g(T)(w)=\left(\sum g_iT^i\right)(w)=\sum \underbrace{g_iT^i(w)}_{\in W}$$ ⇐ W הוא $g(T)$ שמור.

<u>מש"ל</u> ☑

ב. לפי א, מספיק להראות ש $f(T)(W)$ הוא שמור ביחס ל-T. יהי $\left(\sum f_iT^i\right)(w)\in f(T)(W)$

$$T\left(\sum f_iT^i(w)\right)=\sum f_iT^{i+1}(w)=\sum f_iT^i(\underbrace{T(w)}_{w'\in W})=\sum f_iT^i(w')=f(T)(w')\in f(T)(W)$$

ג. (בסוף צריך להבין שהסכום ישר - תרגיל.)

נניח $f(T)(v)\in f(T)(V)$ נרשום: $v=w_1+w_2+\dots+w_r$; $w_i\in W_i$

$$f(T)(v)=f(T)(w_1+\dots+w_r)=\underset{\substack{\Uparrow\\ f(T)(W_1)}}{f(T)(w_1)}+\dots+\underset{\substack{\Uparrow\\ f(T)(W_r)}}{f(T)(w_r)}$$

11.6.08

6

אלגברה לינארית - תרגול 6

<u>תרגיל:</u> בדוק האם המטריצות הבאות לכסינות מעל $\mathbb{R}$.

א. $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right)$

ב. $D=\left(\begin{array}{cc|cc|cc} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$, $\quad \underbrace{\begin{pmatrix}2&0\\3&2\end{pmatrix}}_{A},\ \underbrace{\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}}_{B},\ \underbrace{\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}}_{C}$

ג. $\left(\begin{array}{ccc|c|cc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

<u>פתרון:</u>

<u>א.</u> $A=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$ $\quad B=\begin{pmatrix}1&-2\\2&4\end{pmatrix}$ ונזכור כי אם $C=\begin{pmatrix}A&0\\0&B\end{pmatrix}$

אזי $m_C(x)=lcm(m_A(x),m_B(x))$.

$$f_A(x)=\begin{vmatrix}x-1 & -1\\ -1 & x-1\end{vmatrix}=x^2-2x=x(x-2)\Rightarrow m_A(x)=x(x-2)$$

$$f_B(x)=\begin{vmatrix}x-1 & 2\\ -2 & x-4\end{vmatrix}=\underbrace{x^2-5x+8}_{\text{אי פריק מעל } \mathbb{R}}$$

$$m_C(x)=lcm\left(x(x-2),(x^2-5x+8)\right)=x(x-2)(x^2-5x+8)\Rightarrow$$

$m_C(x)$ לא מתפרק למכפלה של גורמים לינאריים ובפרט לא שונים ולכן C אינה לכסינה.

<u>ב.</u> $P_A(x)=\begin{vmatrix}x-2 & 0\\ -3 & x-2\end{vmatrix}=x^2-4x+4=(x-2)^2\Rightarrow m_A(x)=x-2$ או $(x-2)^2$

אבל $A-2I\neq0$ ולכן $m_A(x)\neq x-2$, ולכן $m_A(x)=(x-2)^2$

$m_D(x)=lcm\left((x-2)^2,\ldots\right)\Rightarrow(x-2)^2\mid m_D(x)\Rightarrow$ D <u>לא לכסינה</u> כי הפירוק של המינימלי בטוח לא יהיה לגורמים לינאריים <u>שונים</u>.

<u>ג.</u> לבדוק לבד.

<u>תרגיל:</u> $A\in M_n(\mathbb{C})$ כך ש $A^8+A^2=I$. הוכח ש A לכסינה.

<u>פתרון:</u> לפי הנתון, A מאפסת את הפולינום $g=x^8+x^2-1$. (רצה) להראות שהפולינום המינימלי מתפרק למכפלה של גורמים לינאריים שונים. (ברור שיש פירוק לגורמים לינאריים כי אנו מעל $\mathbb{C}$ ורק נותר להוכיח שהם שונים).

נניח בשלילה, שיש $\lambda\in\mathbb{C}$ כך ש $(x-\lambda)^2\mid m_A(x)$. לפי הנתון $g\mid m_A(x)$, ולכן $(x-\lambda)^2\mid g(x)$.
נרשום $g(x)=(x-\lambda)^2\cdot h(x)$.

$$g'(x)=2(x-\lambda)\cdot h(x)+(x-\lambda)^2\cdot h'(x)\qquad g'(\lambda)=0,\ g(\lambda)=0$$

$$\lambda^8+\lambda^2-1=0\Rightarrow 8\lambda^7+2\lambda=0\Rightarrow 8\lambda^6+2=0\Rightarrow\lambda^6=-\tfrac{1}{4}$$

$$\lambda^2\left(-\tfrac{1}{4}\right)+\lambda^2-1=0\Rightarrow\lambda^2\cdot\tfrac{3}{4}=1\Rightarrow\lambda^2=\tfrac{4}{3}\Rightarrow\lambda=\pm\tfrac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow\lambda^6=\tfrac{64}{9}\neq-\tfrac{1}{4}$$ <u>סתירה!</u>

מש"ל