(1)

אלגברה לינארית - תרגול 5

<u>תרגיל</u> בדוק האם המטריצה $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ לכסינה מעל $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$.

<u>פתרון:</u>

$$\begin{vmatrix} x-2 & 1 & -2 \\ -5 & x+3 & -3 \\ 1 & 0 & x+2 \end{vmatrix} = -3+2(x+3)+(x+2)\left((x-2)(x+3)+5\right) = 2x+3+(x+2)(x^2+x-1)$$

$$= x^3+3x^2+3x+1 = (x+1)^3$$

לכן יש ע"ע יחיד -1, עם ריבוי אלגברי 3. ריבוי גאומטרי = המימד של מרחב הפתרונות של $(A+I)x=0$.

נדרג

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 5 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

<u>תזכורת:</u> אם $B \in M_n(F)$ אזי

$$\dim\left(\text{מרחב הפתרונות של } Bx=0\right) = n - \underbrace{rk\,B}_{\text{כמה שורות שונות מ-0 יש בצורה המדורגת של B}}$$

בדוגמה זו - מימד מרחב הפתרונות הוא $3-2=1$, לכן הריבוי הגאומטרי $1 \neq 3$ ולכן המטריצה אינה לכסינה.

<u>תרגיל</u> (<u>מבחן</u>) מצא את כל ערכי $a\in\mathbb{R}$ עבורם המטריצה $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a^2 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ לכסינה מעל $\mathbb{R}$.

$$\begin{vmatrix} x-2 & 0 & 0 \\ -1 & x & -a^2 \\ -1 & -4 & x \end{vmatrix} = (x-2)\begin{vmatrix} x & -a^2 \\ -4 & x \end{vmatrix} = (x-2)(x^2-4a^2) = (x-2)(x-2a)(x+2a)$$

אם $a \neq 0,1,-1$ הפולינום האופייני מתפרק למכפלה של גורמים לינאריים שונים ולכן המטריצה לכסינה.

<u>אם $a=0$:</u> הפולינום האופייני: $(x-2)x^2$

<u>ע"ע 2:</u> עם ריבוי גאומטרי ואלגברי 1.

<u>ע"ע 0:</u> עם ריבוי אלגברי 2.

נחשב ריבוי גאומטרי של 0:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{נדרג}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

הריבוי הגאומטרי $3-2=1$ והמטריצה <u>לא</u> לכסינה.

אם $a=\pm 1$ המטריצה: $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ והפולינום האופייני: $(X-2)^2(X+2)$.

<u>ע"ע -2</u>: עם ריבוי אלגברי וגיאומטרי 1.

<u>ע"ע 2</u>: עם ריבוי אלגברי 2.

נדרג את $A-2I$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

הדרגה היא 2 לכן הריבוי הגיאומטרי $3-2=1$ ומכאן ש-A לא לכסינה.

<u>תרגיל (ממבחן)</u>

תהי $A\in M_3(\mathbb{R})$ נתון ש- $rk(A-I)<rk(A-2I)<rk(A-3I)$. הוכח ש-A לכסינה ותאר את כל המטריצות האלכסוניות שדומות ל-A.

<u>פתרון</u>: אם $rk(A-I)=0$ $\Leftarrow$ $A-I=0$ $\Leftarrow$ $A=I$ $\Leftarrow$ $rk(A-2I)=rk(-I)=3$, $rk(A-3I)=rk(-2I)=3$ וזו סתירה לנתונים. לכן $rk(A-I)>0$ ולכן $rk(A-I)=1, rk(A-2I)=2, rk(A-3I)=3$.

<u>באופן כללי</u>: λ ע"ע $\Leftrightarrow$ $A-\lambda I$ מדרגה $<n$ $\Leftarrow$ במקרה שלנו, 1,2 ע"ע.

$rk(A-I)=1$ $\Leftarrow$ ריבוי גאומטרי של 2 $(3-1=2)$

$rk(A-2I)=2$ $\Leftarrow$ ריבוי גאומטרי של 1 $(3-2=1)$

<u>הסבר</u>: $rk(A-\lambda I)<n$ $\Leftrightarrow$ $n-\dim(\text{מרחב הפתרונות של } A-\lambda I)$ $\Leftrightarrow$ $\dim(\text{מרחב האפס})>0$ $\Leftrightarrow$ יש פתרון לא טריוויאלי ל- $(A-\lambda I)x=0$

$\Leftrightarrow$ קיים $v\neq 0$ כך ש- $(A-\lambda I)v=0$ $\Leftrightarrow$ $Av=\lambda v$.

נסמן ב- e_1, e_2 את הריבויים האלגבריים של 1, 2. אז הפולינום האופייני מתחלק ב- $(x-1)^{e_1}(x-2)^{e_2}$, ולכן $3=2+1\le e_1+e_2\le 3$

הריבוי הגיאומטרי $\le$ אלגברי

$$\Leftarrow \begin{cases} e_1+e_2=3 \\ 2\le e_1\le 3 \\ 1\le e_2\le 3 \end{cases} \Leftarrow \begin{matrix} e_1=2 \\ e_2=1 \end{matrix}$$

לכן הפולינום האופייני הוא $(x-1)^2(x-2)$ לכן 1,2 הם כל הע"ע והריבוי הגיאומטרי של כל אחד שווה לאלגברי $\Leftarrow$ המטריצה לכסינה.

<u>תזכורת</u>: הצורה האלכסונית (כשהיא קיימת) <u>יחידה</u> עד כדי סדר האיברים על האלכסון הראשי וכל ע"ע מופיע על האלכסון לפי הריבוי שלו.

לכן במקרה שלנו: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

<u>תרגיל</u>: נסמן $V=R_n[x]$, $T:V\to V$ נתונה ע"י $T(P(x))=P'(x)$. בדוק האם T לכסינה.

<u>פתרון</u>: נסתכל על הבסיס הסטנדרטי: $1, x, x^2, \dots, x^n$ (נשים לב שהמימד הוא $n+1$).

$T(x^0)=0 \qquad \forall i\geq 1:\ T(x^i)=ix^{i-1}$

$T(x^0)=0\cdot 1+0\cdot x+\dots \qquad T(x^n)=0+0x\dots+0\cdot nx^{n-1}$

$T(x)=1\cdot 1+0\cdot x+0\cdot x^2\dots$

$T(x^2)=0\cdot 1+2x+0\cdot x^2+\dots$

$T(x^3)=0\cdot 1+0\cdot x+3x^2+\dots$

המטריצה המייצגת היא:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & & & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 3 & & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

<u>תרגיל</u>: $V=M_n(\mathbb{R})$, $T:V\to V$. נתונה ע"י $T(A)=\frac{1}{2}(A+A^t)$. בדוק האם T לכסינה.

<u>פתרון</u>: אם $A=A^t$ אזי $T(A)=\frac{1}{2}(A+A^t)=\frac{1}{2}\cdot 2A=A=1A$ ולכן 1 הוא ע"ע, והמרחב העצמי שלו הוא

$U=\{$ כל המטריצות הסימטריות $\}$

אם $A=-A^t$ אז $T(A)=\frac{1}{2}(A+A^t)=\frac{1}{2}(A-A)=0=0A$

<u>תזכורת</u>: λ הוא ע"ע אם קיים $v\neq 0$ כך ש $T(v)=\lambda v$, <u>0 יכול להיות ע"ע</u> (אם קיים $v\neq 0$ כך ש $T(v)=0\cdot v=0$).

לכן 0 ע"ע, והמרחב העצמי שלו הוא $W=\{$ כל המטריצות האנטי סימטריות $\}$.

מרחב המטריצות הסימטריות נפרש ע"י המטריצות:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \\ 0 & 0 & \\ & & \ddots \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} 0 & 1 & \\ 1 & 0 & \\ & & \ddots \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \\ 1 & & \ddots \end{pmatrix} \dots$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

לכן,

$$\dim(U) = n+\frac{n^2-n}{2}=\frac{n^2+n}{2}$$

המרחב W נפרש ע"י

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \\ -1 & 0 & \\ & & \ddots \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & & 1 \leftarrow ji \\ & & \\ -1 & 0 & \ddots \\ \uparrow ij & & \end{pmatrix}$$

לכן, $\dim W = \frac{n^2-n}{2}$. וקטורים שמגדירים מרחבים עצמיים שונים הם בת"ל ולכן וקטורים מ- U ו- W הם בת"ל.

מקבלים: $\frac{n^2+n}{2} + \frac{n^2-n}{2} = n^2$ וקטורים עצמיים בלתי תלויים במרחב ממימד n^2.

כלומר מצאנו בסיס B וקטורים עצמיים, לכן T לכסינה.

תרגיל: $A \in M_3(\mathbb{R})$ עם ע"ע יחיד λ, הוכח ש A לכסינה $\Leftrightarrow$ A סקלרית.

$\Leftarrow$: ברור.

$\Rightarrow$: הפולינום האופייני $(\lambda - x)^3$ והריבוי הגאומטרי של λ הוא 3.

$\dim V_\lambda = 3$, לכן $3 - rk(A-\lambda I) = 3 \Leftarrow rk(A-\lambda I) = 0 \Leftarrow A - \lambda I = 0$

$\Leftarrow A = \lambda I = \begin{pmatrix}\lambda&0&0\\0&\lambda&0\\0&0&\lambda\end{pmatrix} \Leftarrow$ A סקלרית.

תרגיל: חשב $\begin{pmatrix}-1&3&-1\\-3&5&-1\\-3&3&1\end{pmatrix}^{100}$

תעשו את זה בבית. רמז - לכסון. ממש יעזור אח"כ.