16.7.08 ①

אלגברה לינארית 2 - תרגול

תרגיל יהי $U = sp\left\{ \overset{v_1}{\begin{pmatrix}1\\1\\2\\0\end{pmatrix}} \overset{v_2}{\begin{pmatrix}3\\0\\4\\-1\end{pmatrix}} \overset{v_3}{\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}} \right\}$

מצא את המרחק בין V ל- $w = \begin{pmatrix}2\\1\\0\\-1\end{pmatrix}$

פתרון המרחק המינימלי הוא המרחק בין w לתת המרחב הווקטורי שלו ע"י V.

תזכורת נניח ש $u \in V$ ונניח ש $u_1, \dots, u_k$ בסיס אורתוגונלי ל- U ו- $v \in V$ אז ההיטל של v על U:

נקראת שבמקרים אלו הפלס

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{\langle u, v\rangle}{\langle u, u\rangle} u$$

נעשה גרם שמידט על $\{v_1, v_2, v_3\}$. $v_1' = v_1$.

$$v_2' = v_2 - \underbrace{\frac{\langle v_1', v_2\rangle}{\langle v_1', v_1'\rangle} v_1'}_{\text{ההיטל של } v_2 \text{ על } v_1'} = \begin{pmatrix}3\\0\\4\\-1\end{pmatrix} - \frac{11}{6}\begin{pmatrix}1\\1\\2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{7}{6}\\-\frac{11}{6}\\\frac{3}{6}\\-1\end{pmatrix}$$

$$v_3' = v_3 - \frac{\langle v_1', v_3\rangle}{\langle v_1', v_1'\rangle} v_1' - \frac{\langle v_2', v_3\rangle}{\langle v_2', v_2'\rangle} v_2' = \text{זה מעניין}$$

$\{v_1', v_2', v_3'\}$ בסיס אורתו' ל- V.

הי' ט' האורתו' של w על V:

$$u = \frac{\langle v_1', w\rangle}{\langle v_1', v_1'\rangle} v_1' + \frac{\langle v_2', w\rangle}{\langle v_2', v_2'\rangle} v_2' + \frac{\langle v_3', w\rangle}{\langle v_3', v_3'\rangle} v_3'$$

המרחק המינימלי הוא: $\|w-u\| = \sqrt{\langle w-u, w-u\rangle} = \underline{\underline{2}}$

צורות בילינאריות וריבועיות

יהי F שדה (שבו $1+1 \neq 0$).

הגדרה: פונקציה $f: V \times V \to F$ נקראת צורה בילינארית אם היא לינארית לשני משתנים. כלומר $f((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = x_1y_1 + x_2y_1$

לכל צורה בילינארית ניתן לשייך מטריצה באופן הבא:

יהי $\overbrace{\{w_1, \dots, w_n\}}^{B}$ בסיס ל- V אז:

I. לכל מטריצה A מסדר $n \times n$ מגדיר צורה בילינארית ע"י $f(v,u) = [v]_B^t \cdot A \cdot [u]_B$

II. לכל צורה f בילינארית, אז מתאימה לה המטריצה:

$$A = [f(v_i, v_j)]_{ij}$$

דוגמה: יהי B הבסיס הסטנדרטי ל- $\mathbb{R}^2$:

$$f((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = x_1y_1 + 2x_2y_1 - x_1y_2 + 3x_2y_2$$

נמצא $B = \{e_1, e_2\}$ ל- $\mathbb{R}^2$. המטריצה שמתאימה ל- f:

$$\begin{pmatrix} f(e_1,e_1) & f(e_1,e_2) \\ f(e_2,e_1) & f(e_2,e_2) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} f(e_1,e_1) & f(e_1,e_2) \\ f(e_2,e_1) & f(e_2,e_2) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}}_{A}$$

זו הצורה שמתאימה ל- A:

$$f((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = (x_1,x_2)\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = (x_1,x_2)\begin{pmatrix} y_1-y_2 \\ 2y_1+3y_2 \end{pmatrix} = x_1(y_1-y_2)+x_2(2y_1+3y_2)$$
$$= x_1y_1+2x_2y_1-x_1y_2+3x_2y_2$$

<u>הגדרה:</u> צורה f נקראת סימטרית אם $f(v,u)=f(u,v)$ לכל u,v. לא קשה לראות שמטריצה המתאימה ל- f סימטרית.

<u>דוגמה:</u> המכפלה הסקלרית הרגילה מעל $\mathbb{R}$.

<u>צורה ריבועית:</u>
אם $f: V\times V\to F$ צורה בי"ל, אזי הפונ' $q: V\to F$ המוגדרת ע"י $q(v)=f(v,u)$ נקראת הצורה הריבועית המתאימה ל- f.

<u>דוגמה:</u>
$$f((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)) = x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3$$
$$q((x_1,x_2,x_3)) = x_1^2+x_2^2+x_3^2 = \|(x_1,x_2,x_3)\|^2$$

ההתאמה הזו בין צורה בי"ל לריבועית איננה חח"ע. <u>שכן:</u>
אם נתבונן בצורות בי"ל <u>סימטריות</u> ההתאמה חח"ע, כלומר, לכל צורה ריבועית q מתאימה צורה בי"ל <u>סימטרית</u> יחידה, הנתונה ע"י $f(v,u)=\frac{1}{2}(q(u+v)-q(u)-q(v))$.

<u>דוגמה:</u> (צורה על $\mathbb{R}^3$) $q = x^2+3y^2+2z^2+4xy-6xz+8yz$

הצורה הבי"ל המתאימה, אי אילו שקול, המטריצה המתאימה:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 4 \\ -3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \qquad f(e_i,e_j) = \frac{1}{2}(q(e_i+e_j)-q(e_i)-q(e_j))$$

<u>שינוי בסיס</u>

<u>משפט:</u> אם B, B' בסיסים שונים ו- M מטריצת המעבר מ- B ל- B' אזי $[f]_{B'} = M^t[f]_B M$
המטריצה המתאימה ל- f לפי B'.

(א) מטריצות A,B נקראות חופפות אם קיימת M הפיכה כך ש- $A=M^t[f]_B M$.

<u>משפט:</u> תהי f צורה (בי"ל / ריבועית) ותהי A המטריצה המייצגת את f (לפי בסיס מסוים), אזי מטריצה B מייצגת את f (לפי איזשהו בסיס) אמ"מ A,B חופפות.

<u>שאלה:</u> איזו מטריצות חופפות למטריצת אלכסונית?

<u>תשובה:</u> מטריצה חופפת למטריצה אלכסונית אמ"מ היא סימטרית.

<u>שאלה:</u> איך מוצאים מטריצה אלכסונית החופפת למטריצה סימטרית נתונה?

למה: אם מתקיים על מטריצה A פעולה אלמנטרית של השורות, ואז <u>אותה</u> פעולה אלמנטרית של העמודות, מתקבלת מטריצה חופפת.

הוכחה: פעולה אלמנטרית על A שקולה לכפל A (מימין) במטריצה אלמנטרית E כאשר אין, פעולה זו של העמודות מתקבלת מ"כפל משמאל ב-E^t, לכן זה נותן את שניהם יחד את המטריצה: $E^t A E$.

דוגמה:

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&6&-1\\3&6&4&8\\4&-1&8&0\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2\leftarrow R_2-2R_1}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&-1&0&-9\\3&6&4&8\\4&-1&8&0\end{pmatrix}\xrightarrow{C_2\leftarrow C_2-2C_1}\begin{pmatrix}1&0&3&4\\0&-1&0&-9\\3&0&4&8\\4&-9&8&0\end{pmatrix}\xrightarrow[C_3\to C_3-3C_1]{R_3\to R_3-3R_1}\begin{pmatrix}1&0&0&4\\0&-1&0&-9\\0&0&-5&-4\\4&-9&-4&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_4\leftarrow C_4-4C_1]{R_4\leftarrow R_4-4R_1}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&-9\\0&0&-5&-4\\0&-9&-4&-65\end{pmatrix}\xrightarrow[C_4\leftarrow C_4-9R_4]{R_4\leftarrow R_4-9R_2}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-5&-4\\0&0&-4&-65\end{pmatrix}\xrightarrow[C_3\leftarrow\frac{1}{\sqrt5}C_3]{R_3\leftarrow\frac{1}{\sqrt5}\cdot R_3}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&-\frac{4}{\sqrt5}\\0&0&-\frac{4}{\sqrt5}&-65\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[C_4\leftarrow C_4-\frac{4}{\sqrt5}C_3]{R_4\leftarrow R_4-\frac{4}{\sqrt5}R_3}\underbrace{\begin{pmatrix}1&&&0\\&-1&&\\&&-1&\\0&&&*\end{pmatrix}}_{\text{צורה אלכסונית}}$$

דוגמה: מצא מטריצה אלכסונית החופפת למטריצה $\begin{pmatrix}0&2\\2&1\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}0&2\\2&1\end{pmatrix}\xrightarrow[C_1\leftrightarrow C_2]{R_1\leftrightarrow R_2}\begin{pmatrix}1&2\\2&0\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{בכיוון}]{\text{משלים}}\begin{pmatrix}1&0\\0&-4\end{pmatrix}$$

דוגמה:

$$\begin{pmatrix}0&4&2\\4&0&1\\2&1&0\end{pmatrix}\xrightarrow[C_1\leftarrow C_1+C_2]{\text{שים}\ R_1\leftarrow R_1+R_2}\begin{pmatrix}8&4&3\\4&0&1\\3&1&0\end{pmatrix}\xrightarrow[\text{בכיוון}]{\text{משלים}}\begin{pmatrix}8&&\\&-2&\\&&-1\end{pmatrix}$$

הצורה האלכסונית אינה יחידה:

$$\begin{pmatrix}3&0\\0&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&-2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

הצורה הקנונית:

כל מטריצה ממשית סימטרית חופפת למטריצה <u>יחידה</u> מהצורה הבאה:

$$\begin{pmatrix}1&&&&&\\&\ddots&&&&\\&&1&&&\\&&&-1&&\\&&&&\ddots&\\&&&&&-1\\&&&&&&0\\&&&&&&&\ddots\\&&&&&&&&0\end{pmatrix}$$

16.7.08 ④

אלגברה לינארית 2 - תרגול

<u>הגדרה</u> מטריצה $\in$ כל מטריצה סימטרית חיובית למטריצה יחידה מהצורה

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

<u>שאלה מבחינה</u> לכל $a\in\mathbb{R}$, מצא את הצורה הקנונית של המטריצה:

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac12 & \frac12 a \\ \frac12 & 0 & \frac12 \\ \frac12 a & \frac12 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[C_1\leftarrow C_1+C_2]{R_1\leftarrow R_1+R_2} \begin{pmatrix} 1 & \frac12 & \frac12(a+1) \\ \frac12 & 0 & \frac12 \\ \frac12(a+1) & \frac12 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[C_2\leftarrow C_2-\frac12 C_2]{R_2\leftarrow R_2-\frac12 R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac12(a+1) \\ 0 & -\frac14 & -\frac14 a-\frac12 \\ +\frac12(a+1) & -\frac14 a-\frac12 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{איש}]{}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac14 & -\frac14 a-\frac12 \\ 0 & -\frac12 a-\frac12 & -\frac14(a+1)^2 \end{pmatrix} \xrightarrow[C_2\to 2C_2]{R_2\to 2R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -\frac12 a-1 \\ 0 & -\frac12 a-1 & -\frac14(a+1)^2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac14(a+1)^2+(\frac12 a+1)^2 \end{pmatrix}$$

$$-\frac14(\cancel{a^2}+2a+1)+\cancel{\frac14 a^2}+a+1 = \frac12 a+\frac34$$

לכן, אם $a=-\frac32$, הצורה הקנונית $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$, אם $a>-\frac32$, הצורה הקנונית $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$

אם $a<-\frac32$, הצורה הקנונית $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$.