9.7.08 (1)

אלגברה לינארית - תרגול

הערה: למה בסיס אורתונormלי חשוב?

יהי $B=\{u_1,\dots,u_n\}$ בסיס אורתונormלי ל- V, $\langle\cdot\rangle$ אז $[v]_B=\begin{pmatrix}\langle u_1,v\rangle\\ \vdots\\ \langle u_n,v\rangle\end{pmatrix}$.

$$\left([T]_B\right)_{ij}=\left(\langle u_i,Tu_j\rangle\right)$$

בדרך לא מעטת בלי חשובים אפשר לעבוד עם בסיס הומוגני תקינים.

נכונות חשובות

1) $\|u+v\|^2=\|u\|^2+2\mathrm{Re}\langle u,v\rangle+\|v\|^2$

2) שוויון המקבילית $\|u+v\|^2+\|u-v\|^2=2(\|u\|^2+\|v\|^2)$

3) מעל $\mathbb{R}$ $\langle u,v\rangle=\frac{1}{2}\left(\|u+v\|^2-\|u\|^2-\|v\|^2\right)$

מעל $\mathbb{C}$ $\langle u,v\rangle=\frac{1}{4}\left(\|u+v\|^2-\|u-v\|^2+2\|u+iv\|^2-2\|u-iv\|^2\right)$

הוכחה:

1) $\langle u+v,u+v\rangle=\langle u,u\rangle+\underbrace{\langle u,v\rangle+\langle v,u\rangle}_{\text{תנאי הכרחי אפשר והכרחי אז לא בשאר הלק המשלי}}+\langle v,v\rangle$

2) הוכח בתרגיל.

3) הבדלת ל- 1 ו- 2.

המשלים האורתוגונלי

V, $\langle\,\rangle$ $U\le V$ הגדרה $U^\perp=\{v\in V\mid \langle v,u\rangle=0\ \forall u\in U\}$

דוגמא: $V=\mathbb{R}^3$ עם מכפלה סקלרית. $U=sp\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\}$, $U^\perp=sp\{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\}$

$$\forall x,y:\ \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\perp\begin{pmatrix}x\\y\\0\end{pmatrix}\Rightarrow \begin{matrix}a=0\\b=0\end{matrix}$$

כדי הוכחה לבדוק לקחנו לדוגמא $x=0$ ו- $y=0$ וקבלנו את המכפלה $a=0\Leftarrow\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\perp\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=0$

הגדרה אם K פורשת את U אז $U^\perp\{v\in V\mid \forall u\in K: v\perp u\}$.

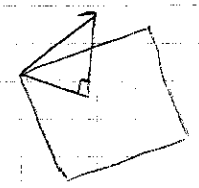
תרגיל

$W = sp\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right\} \subseteq (\mathbb{R}^3, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ מצא את $W^\perp$

$$W^\perp = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \middle| v \perp \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \wedge v \perp \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right\} = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \middle| \begin{matrix}x+z=0\\y+z=0\end{matrix}\right\} = span\left\{\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

תרגיל

מצא את ההטלה של $v = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ על W.



$V = W \oplus W^\perp$

$Pr_W v \in W$ ההטלה

$v - Pr_W v \in W^\perp$

נקח $\{w_1, w_2\}$ בסיס אי"נ ל-W $\quad w_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$

$$v = \underbrace{\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2}_{\in W} + \underbrace{\alpha_3 w_3}_{\in W^\perp} \qquad Pr_W v = v - \alpha_3 w_3$$

$Pr_W v$

$$\alpha_3 = \langle w_3, v\rangle = \frac{-1}{\sqrt{3}} \Rightarrow Pr_W v = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\2\\4\end{pmatrix}$$

ההעתקה הצמודה

יהי $V, \langle\cdot,\cdot\rangle_V$, $W, \langle\cdot,\cdot\rangle_W$ מ"ו $T: V \to W$.

משפט: קיימת העתקה יחידה $T^*: W \to V$ כך ש:

$$\forall v \in V, w \in W.\ \langle Tv, w\rangle_W = \langle v, T^* w\rangle_V$$

למה

אם B_1, B_2 בסיסים אי"נ של V, W אז $[T^*]_{B_2}^{B_1} = \left([T]_{B_1}^{B_2}\right)^*$

מסקנה: $rk\, T = rk\, T^*$
$\dim Im\, T$

אם $\dim V = \dim W$ אז גם מתקיים $\dim \ker T = \dim \ker T^*$.

דוגמא $V = \mathbb{R}^2$ עם מ"פ שבת הבס'ס $B = \left\{\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$ הינו אי"נ

$(\langle v, u\rangle := \langle [v]_B, [u]_B\rangle_{st})$

נתון אופרטור $T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x-y\\-x\end{pmatrix}$.

המשך...

נחשב את T^*:

$$[T]_B = \begin{pmatrix} | & | \\ [Tb_1]_B & [Tb_2]_B \\ | & | \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow [T^*]_B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$[T^*]_E = [E]_B^{-1} \cdot [T^*]_B [E]_B \qquad \Rightarrow \quad T^*\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 13x - y \\ -29x - 4y \end{pmatrix}$$

$$[E]_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 13 & -1 \\ -29 & 4 \end{pmatrix}$$

<u>תכונות הצמוד</u>

$$(T+S)^* = T^* + S^*$$

$$(\lambda T)^* = \bar{\lambda} T^*$$

$$(ST)^* = T^* S^*$$

$$(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$$

$$(T^*)^* = T$$

<u>תרגיל</u>

$V = M_n(F)$ עם המכפלה $\langle A,B \rangle = tr(A^* B)$

נתון אופרטור $T: V \to V$, $M \in M_n(F)$, $T(A) = M^* A M$. למצוא את T^*.

<u>פתרון:</u>

$$\forall A,B: \langle A, T^* B \rangle \underset{\text{הגדרת הצמוד}}{=} \langle TA, B \rangle = \langle M^* A M, B \rangle = tr((M^* A M)^* B) = tr(\underbrace{M^*}_{D'} \underbrace{A^* M B}_{D})$$

$$\underset{tr(D'D) = tr(DD')}{=} tr(A^* M B M^*) = \langle A, M B M^* \rangle \Rightarrow T^*(A) = M A M^*$$

<u>הגדרה:</u>

T נקרא צמוד לעצמו אם $T = T^*$ (בלט').

<u>תרגיל:</u> נניח S,T בלט' (מעל $\mathbb{C}$). הראו כי $i(TS-ST)$, $TS+ST$ בלט'.

<u>פתרון:</u>

$$(TS+ST)^* = S^* T^* + T^* S^* = ST + TS = TS + ST$$

$$(i(TS-ST))^* = i(S^* T^* - T^* S^*) = -i(ST - TS) = i(TS - ST)$$

<u>תרגיל:</u> V מ"פ, $U \subseteq V$ ת"מ, $V = U \oplus U^\perp$ (לכל v קיים פירוק $v = \underset{U}{v_1} + \underset{U^\perp}{v_2}$). נגדיר אופרטור $T(v) = v_1 - v_2$. לחשב את הצמוד.

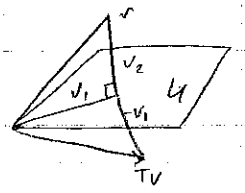
פתרון:

דרך I:

$$\langle u, T^*v\rangle = \langle Tu, v\rangle = \langle u_1-u_2, v_1-v_2\rangle = \langle u_1,v_1\rangle - \langle u_2,v_2\rangle + \underbrace{\langle u_1,v_2\rangle}_{0} - \underbrace{\langle u_2,v_1\rangle}_{0}$$

④ נשים לב שאת u ואת v פירקנו ל u_1,u_2 ו- v_1,v_2 בהתאמה כאן כך u_1 ו- v_1 שייכים ל U ו u_2,v_2 שייכים ל $U^\perp$. לכן תוספת הפנימית הן 0 ונוכל לשנות את הסימן שלפניהם.

$$= \langle u_1,v_1\rangle - \langle u_2,v_2\rangle - \langle u_1,v_2\rangle + \langle u_2,v_1\rangle = \langle u_1+u_2, v_1-v_2\rangle \Rightarrow \boxed{T^*v = v_1-v_2 = Tv}$$



כלומר לאפשר שיקוף דרך U

דרך II:

B_1 - בסיס אורתו של U, B_2 - בסיס אורתו של $U^\perp$

$B = B_1 \cup B_2$ (בסיס אורתו של V) — סיומן של שרשור

$$[T]_B = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & 1 & & & \\ \hline & & & -1 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & -1 \end{array}\right) \Rightarrow [T^*]_B = [T]_B \Rightarrow T^* = T$$

הגדרה: אופרטור T נקרא **אורתוגונלי** אם $T\cdot T^* = I_d$. לעומת זאת $A\cdot A^* = I$. מעל $\mathbb{C}$ הוא נקרא **יוניטרי**.

תכונות (שקילות)

1) $\langle Tv, Tu\rangle = \langle v,u\rangle \quad \forall u,v$

2) $\|Tv\| = \|v\| \quad \forall v$

3) T ממיר בסיס אורתו לשהו לבסיס אורתו.

הערה: מטריצה A אורתו (או יוניטרית) אמ"מ עמודות A בסיס אורתו אמ"מ שורות A הן בסיס אורתו.

הערה: T אופרטור יוניטרי אז אם λ ע"ע של T אז $|\lambda|=1$ (ערך מוחלט מורכב)

פתרון: נניח $Tv=\lambda v \quad (v\neq 0)$

$$\langle v,v\rangle = \langle Tv, Tv\rangle = \langle \lambda v, \lambda v\rangle = \bar\lambda\cdot\lambda\langle v,v\rangle = |\lambda|^2\langle v,v\rangle \Rightarrow |\lambda|^2=1 \Rightarrow |\lambda|=1$$

(אינטואיציה)

שאלה: לאופרטור אורתו (מעל $\mathbb{R}$) יכולים להיות ע"ע רק 1 או -1.

$O(n)$ - מטריצות אורתוגונליות ב- $M_n(\mathbb{R})$ $\qquad$ $U(n)$ - מטריצות יוניטריות ב- $M_n(\mathbb{C})$

$O(2)$: שיקופים:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$$

סיבובים:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$