פרק 6: תלות, בסיס יחסי

הכללה של המושגים "אי תלות" ו"בסיס" בעזרת תלות, והגדרה של בסיס יחסי.

וקטורים בת"ל ובסיס ביחס לתת מרחב

יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F. ויהיו $W \subset W' \subset V$; $v_1, \dots, v_k$ וקטורים ב-W'

א- **בת"ל ביחס ל-W** - אומרים ש-$v_1, \dots, v_k$ בלתי תלויים ביחס ל-W אם מתקיים התנאי:

$$a_1v_1 + \dots + a_kv_k \in W \iff \forall i, a_i = 0 \quad \text{(כאשר } \forall i, a_i \in F\text{)}$$

באופן שקול אם $0 = w + a_1v_1 + \dots + a_kv_k$ כאשר $w \in W$, $\forall i, a_i \in F$ אז $w = 0$ וגם $\forall i, a_i = 0$ (הגדרה שקולה).

קשר להגדרה הרגילה-

אם W הוא המרחב הטריוויאלי $\{0\}$ מתקבלת אי תלות רגילה.

אם $W \neq \{0\}$ אז ההגדרה יותר מסובכת מאשר אי תלות רגילה

ב- יהי $w_1, \dots, w_h$ בסיס כלשהו של W אז לכל $w \in W$ יש תיאור יחיד מהצורה: $w = b_1w_1 + \dots + b_hw_h$ נציב את התיאור הזה במקום ה-w בהגדרה השקולה $0 = a_1v_1 + \dots + a_kv_k + b_1w_1 + \dots + b_hw_h$ ואז נקבל ש-$v_1, \dots, v_k$ בת"ל ביחס ל-W אם"ם הקבוצה $v_1, \dots, v_k, w_1, \dots, w_h$ בת"ל (כי $w = 0$ לפי ההגדרה השקולה ושים לב ש-w_i בת"ל כיוון שהם בסיס אז גם הצירוף כל $b_i = 0$).

דוגמא- נניח $V = F^7$ עם הבסיס הסטנדרטי.
נגדיר

$$W' = span\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}, W = span\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$$

$$\{e_1, e_2\}$$

יהיו v_1, v_2 ב-F^7. v_1, v_2 שייכים ל-W' אם"ם הם מהצורה

$$v_2 = \begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\\y_5\\0\\0\end{pmatrix}, v_1 = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\\0\\0\end{pmatrix}$$

מתי הם יהיו בת"ל?

אם ב-F^3 נעשה זיהוי בעזרת "מחיקה" שימוש אלו קורדינטות x_3, x_4, x_5 ו-y_3, y_4, y_5 אז הם תלויים. אם רק הצירוף הטריוויאלי נותן אפס אז הם בת"ל.

בודקים האם בת"ל ביחס ל-W אם"ם $\begin{pmatrix}x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}y_3\\y_4\\y_5\end{pmatrix} \in F^3$ הם בת"ל.

ג- **בסיס יחסי** - (בהמשך ההגדרה הקודמת) אומרים ש-$v_1, \dots, v_k$ הם בסיס של W' ביחס ל-W אם הם בת"ל ביחס ל-W וגם $W' = W + span\{v_1, \dots, v_k\}$ (משלימים את W אל המרחב השלם של W').

באופן שקול, $v_1, \dots, v_k$ בסיס ל-W' ביחס ל-W אם"ם לכל וקטור $w' \in W'$ יש ייצוג יחיד מהצורה $w' = a_1v_1 + \dots + a_kv_k + w$ (כאשר $w \in W$, $\forall i, a_i \in F$).

קשר להגדרה הרגילה-

* אם $W = \{0\}$ מקבלים את המושג של בסיס של W'.
* אם $w_1, w_2, \dots, w_h$ בסיס של W אז $v_1, \dots, v_k$ בסיס של W' ביחס ל-W אם"ם $w_1, w_2, \dots, w_h, v_1, \dots, v_k$ בסיס ל-W'. (שים לב ש-$W \subset W'$).

נשים לב כי בדוגמא שלנו לא ייתכן ש-v_1, v_2 בסיס של W' ביחס ל-W משום שאם יש בסיס וקטורים שנשלים בת"ל ביחס ל-W אז $k = \dim W' - \dim W$ (זה מספר הקואורדינטות שלא נמחקו בת"ל).

לדוגמא, נוכל להוסיף את v_3 כך ש-v_1, v_2, v_3 בסיס של W' ביחס ל-W והתנאי של v_3 לקיים הוא שהטלת הווקטורים (זה משלים ל-F^3 וצריך להיות בסיס ל-F^3). נניח

$$v_3 = \begin{pmatrix}z_1\\z_2\\z_3\\z_4\\z_5\\0\end{pmatrix}$$

אז $\begin{pmatrix}x_3\\x_4\\x_5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}y_3\\y_4\\y_5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}z_3\\z_4\\z_5\end{pmatrix}$ צריכים להוות בסיס ל-F^3.

טענת השלמה לבסיס

הטענה: יהיו $v_1,\dots,v_k \in W$ בת"ל, מימד W (אם $k=0$ מדובר בקבוצה הריקה). נבחר בסיס כלשהו $w_1,\dots,w_n$ של W. מאחר ש v_i כ"א מימד W אז סדרת הוקטורים $v_1,\dots,v_k,w_1,\dots,w_n$ הם וקטורים ב-W. עם ... (זה לא המקרה של ... הלמה המוכרת).

נשים סדרה בת"ל של W: $w_1,\dots,w_h,v_1,\dots,v_k,\dots,v_m$ וזוהי סדרה בת"ל שהיא בסיס ל W מימד W.

שימו לב: במקרה זה $v_1,\dots,v_k$ הם בת"ל במימד W, אבל הם אינם בסיס של W מימד W. אם הם היו בסיס אז $k=m$ ואין צורך להוסיף עוד וקטורים כדי לקבל בסיס. במקרה ש $k<m$ אז זה כמו בדוגמא שיש לנו 2 וקטורים בת"ל אבל אינם בסיס לכן נשלים לבסיס של F^3 וזה נשים עוד 3 הוקטורים הללו לבסיס של W ע"י איחוד עם מספר n

שרשראות ז'ורדן

נניח $T: V \to V$ טרנספורמציה לינארית, $\dim V < \infty$, שרשרת ז'ורדן המתאימה לערך עצמי $\lambda \in F$, היא סדרת וקטורים $v_1,\dots,v_k \in V$ כך ש

$$Tv_k = \lambda v_k + v_{k-1} + \dots + v_1$$
$$Tv_{k-1} = \lambda v_{k-1} + v_{k-2} + \dots + v_1$$
$$\vdots$$
$$Tv_2 = \lambda v_2 + v_1$$
$Tv_1 = \lambda v_1$, $v_1 \neq 0 \implies$ v_1 הוא וקטור עצמי

באופן שקול ניתן לרשום -

$$(T-\lambda I)v_k = v_{k-1}, \dots, (T-\lambda I)v_2 = v_1, (T-\lambda I)v_1 = 0$$

כל פעם שמפעילים את $(T-\lambda I)$ מקבלים את הוקטור הבא.

נשים לב כי שרשרת ז'ורדן היא תמיד בת"ל לינארית וכי שרשרת באורך 1 היא וקטור עצמי.

תרגיל בית-

הוכח כי כל שרשרת ז'ורדן היא בת"ל לינארית.

משמעות- נניח שהסדרה מהווה בסיס $B=\{v_1,\dots,v_k\}$ של V (כולל v_k) אבל בסדר הפוך (מהסוף מימין! כלומר הוא הוקטור הראשון). נחשב את T לפי בסיס זה -

$$[T]_B = \underbrace{\begin{pmatrix} | & | & & | \\ [Tv_1]_B & [Tv_2] & \dots & [Tv]_k \\ | & | & & | \end{pmatrix}}_{\text{מטריצה הוקטורים המוצגת לפי בסיס } \lambda} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \lambda \\ 0 & 0 & & 0 \end{pmatrix} = J_k(\lambda) = J$$

מטריצות- עבור מטריצות, נעבור מהשרשרת ז'ורדן למטריצה

$$S = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ v_1 & v_2 & \dots & v_k \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

נשים לב ש $v_1,\dots,v_k$ בת"ל אז המטריצה S הפיכה.

$$AS = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ Av_1 & Av_2 & \dots & Av_k \\ | & | & & | \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} | & | & & | \\ \lambda v_1 & \lambda v_2 + v_1 & \dots & \lambda v_k + v_{k-1} \\ | & | & & | \end{pmatrix}}_{\text{מהגדרה של שרשרת ז'ורדן}}$$

$$SJ = \begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \dots & v_k \\ | & & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \\ 0 & & \ddots & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ \lambda v_1 & \lambda v_2 + v_1 & \dots & \lambda v_k + v_{k-1} \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

ניתן לראות כי $AS = SJ$ לכן $A = SJS^{-1}$

זה קורה אם מצאנו שרשרת ז'ורדן שהיא בסיס.

הגדרה - נניח $T: V \to V$ טרנספורמציה לינארית, $\dim V < \infty$ (או A מטריצה)
אם מצאנו בסיס של V (המורכב משרשראות ז'ורדן מהצורה הבאה):

$$B = \{\underbrace{v_1^1,\dots,v_{k_1}^1}_{\text{איבר } \lambda\text{, הוא האיבר הראשון } v_k^1},\ \underset{\substack{\uparrow \\ \text{איבר שני}}}{v_1^2,\dots,v_{k_2}^2},\ \dots,\ \underset{\substack{\uparrow \\ \text{איבר אחרון}}}{v_1^T,\dots,v_{k_T}^T}\}$$

מס' הוקטורים – k_T ☆ בשרשרת ה-T.

נסמן ב- $\mu_1,\dots,\mu_T$ הערכים העצמיים המתאימים לשרשראות הנ"ל.

אז

$$[T]_B = \begin{pmatrix} J_{k_1}(\mu_1) & & 0 \\ & J_{k_2}(\mu_2) & \\ 0 & & \ddots \end{pmatrix}$$

ונאמר שמטריצה A (כאשר $S = \begin{pmatrix} v_1 & \cdots & v_{k_1} & \cdots & v_i & \cdots & v_{k_t} \\ | & & | & & | & & | \end{pmatrix}$ מספר זה

וכיוון שמתקיים $AS = SJ$ ולכן $A = SJS^{-1}$.

הערה - הוקטורים $\lambda v_k + v_{k-1}$ אינם וקטורים עצמיים משום ש $v_{k-1} = (\lambda I - T)v_k \neq 0$
ומשום ש $v_i \neq 0$ לכל i, $v_i \neq 0$. אם אין וקטורים עצמיים מוכללים
אזי רק v_i הוא וקטור עצמי. מבחינה מטריציונית הסיבה היא ש J אינה מטריצה אלכסונית.
אלא יש λ_i לכל וקטור כזה v_i שהוא בעצמו וקטור עצמי.

תבנית הבניה של בסיס ז'ורדן

$T: V \to V$ טרנספורמציה לינארית $\dim V < \infty$ (או A מטריצה)
נניח ש m_T מתפרק מעל F - סכום גורמים לינאריים $m_T(x) = (x-\lambda_1)^{n_1} \cdots (x-\lambda_k)^{n_k}$
(כאשר $\lambda_i \neq \lambda_j$ $\forall i \neq j$)
ממשפט הפירוק הפרימרי מתקיים $V = \bigoplus_{i=1}^{k} \ker(T-\lambda_i I)^{n_i}$

עכשיו מספיק להראות שלכל מספר l יש בסיס של $\ker(T-\lambda_i I)^l$ המורכב משרשראות ז'ורדן.

הערה - $\ker(T-\lambda_i I)^{k-1} \subset \ker(T-\lambda_i I)^k$ משום שאם הוא מתאפס בחזקה k-1 אז בפרט
הן מתאפסות בחזקה גבוהה ממנה.

למה
אם $v_1, \dots, v_m$ וקטורים ב $\ker(T-\lambda I)^k$ הם בת"ל ביחס ל $\ker(T-\lambda I)^{k-1}$ אז:
א- $(T-\lambda I)v_1, \dots, (T-\lambda I)v_m$ נמצאים בתוך $\ker(T-\lambda I)^{k-1}$
ב- הם בת"ל ביחס ל $\ker(T-\lambda I)^{k-2}$. ($k \geq 2$).

הוכחה -
א- נשים לב כי $(T-\lambda I)^{k-1}((T-\lambda I)v_j) = (T-\lambda I)^k v_j = 0$
משום ש $v_j \in \ker(T-\lambda I)^k$ אז $\forall j.\ (T-\lambda I)^k v_j = 0$.

ב- נניח ש $a_1(T-\lambda I)v_1 + \dots + a_m(T-\lambda I)v_m$ שייך ל $\ker(T-\lambda I)^{k-2}$
ונוכיח ש $\forall i.\ a_i = 0$
זה אומר שייכות למרחב $\ker(T-\lambda I)^{k-2}$ אומר שכאשר נפעיל עליהם את הטרנספורמציה
$(T-\lambda I)^{k-2}$ נקבל 0 כלומר
$0 = (T-\lambda I)^{k-2}[a_1(T-\lambda I)v_1 + \dots + a_m(T-\lambda I)v_m) = (T-\lambda I)^{k-1}(a_1v_1 + \dots + a$
וזה אומר שהסכום $a_1v_1 + \dots + a_mv_m$ שייך ל $\ker(T-\lambda I)^{k-1}$. הנחנו כי ביחס למרחב
זה הם בת"ל ולכן $\forall i.\ a_i = 0$.

זה כלומר שאם נרצה לבנות בסיס ז'ורדן אני צריך לבחור וקטור בעל שרשרת שאני
מפעיל עליו $(T-\lambda I)$ אני מקבל את הוקטור הבא והאחרון הוא וקטור עצמי של λ.
כאשר אני מפעיל $(T-\lambda I)$ על v_1 (הוקטור העצמי) אני מקבל 0.

מהלך הבניה

נתונים λ ו- l ונבנה בסיס של $\ker(T-\lambda I)^l$ המורכב משרשראות ז'ורדן.
מתחילים מבסיס B_l, $B_l = \{v_{l,1}, \dots, v_{l,m_l}\}$ (אולי ריק) של $\ker(T-\lambda I)$ -
ביחס ל $\ker(T-\lambda I)^{l-1}$. אם הבסיס ריק אז $\ker(T-\lambda I)^{l-1} = \ker(T-\lambda I)^l$ וזה
(מצא בסיס של $\ker(T-\lambda I)^{l-1}$).
משום שהוא בסיס ביחס ל $\ker(T-\lambda I)^{l-1}$ נוכל להוסיף ל B_l בסיס של $\ker(T-\lambda I)^{l-1}$
ונקבל בסיס של $\ker(T-\lambda I)^l$. עלינו להראות שבסיס זה יהיה מורכב משרשראות
ז'ורדן (בסוף נמצא בסיס של המרחב הרצוי).

מפעילים על כל וקטור ב B_l את $(T-\lambda I)$ ומקבלים וקטורים חדשים
נסמן $v_{l-1,1} = (T-\lambda I)v_{l,1}$, ..., $v_{l-1,m_l} = (T-\lambda I)v_{l,m_l}$ m_l זה מס' השרשראות
באורך l.
לפי הלמה וקטורים אלו נמצאים ב $\ker(T-\lambda I)^{l-1}$ והם בת"ל ביחס ל $\ker(T-\lambda I)^{l-2}$

נשלים אותם לבסיס של $\ker(T-\lambda I)^{l-1}$ מוד' ביחס ל $\ker(T-\lambda I)^{l-2}$.
נשים אותם לבסיס B_{l-1} של $\ker(T-\lambda I)^{l-1}$: $v_{l-1,1},\dots,v_{l-1,m_l},\dots,v_{l-1,m_{(l-1)}}$
(זהו בסיס ביחס ל-$\ker(T-\lambda I)^{l-2}$). $m_l \le m_{(l-1)}$
האינדקס הראשון קשור למקום בכל שרשרת והאינדקס השני לאיזה ker אנו שייכים.

אם נצרף וקטורים אלו מבסיס של $\ker(T-\lambda I)^{l-2}$ נקבל בסיס של $\ker(T-\lambda I)^{l-1}$ וגם נצרף את כל הוקטורים של בסיס זה ל B_l נקבל בסיס של המרחב $\ker(T-\lambda I)^l$.

נפעיל על הוקטורים ב B_{l-1} את $(T-\lambda I)$ ונמשיך באופן רקורסיבי.

בשלב האחרון נפעיל על B_2 (הבסיס של $\ker(T-\lambda I)^2$ ביחס ל $\ker(T-\lambda I)$ מהשלב הקודם) נפעיל את $(T-\lambda I)$ ונקבל $v_{1,1}=(T-\lambda I)v_{2,1},\dots,v_{1,m_2}=(T-\lambda I)v_{2,m_2}$
לפי הלמה וקטורים אלו שייכים ל $\ker(T-\lambda I)$ והם בת"ל ביחס ל $\ker(T-\lambda I)^0=\{0\}$
כלומר בת"ל באופן כללי. ונשלים את הבסיס הזה לבסיס B_1 (ההשלמה היא הוספה של וקטורים עצמיים שהם שרשראות ז'ורדן מסדר 1. כל הבסיס של B_1 (כל הוקטורים שבו) הם וקטורים עצמיים ל λ.
וקטורים אלו (של B_1) שונים מ-0 והם וקטורים עצמיים מתאימים ל λ.

מרקורסיה הפוכה (1 ← 2 ← 3 ← ...) רואים שקיבלנו בסיס $B=\{B_l\cup B_{l-1}\dots\cup B_1\}$ של $\ker(T-\lambda I)^l$ ובנוי הוא מורכב משרשראות ז'ורדן:
הוקטורים ההתחלתיים של שרשראות אלו הם הבסיס B_l ההתחלתי וכל הוקטורים שהוספנו בהשלמות של הבסיסים (החל מהשלב השני כולל השלב האחרון (שבו הוספנו וקטורים עצמיים שהם וקטורים עצמיים והם שרשראות מסדר 1). בכל פעם שהוספנו איבר להשלמת הבסיס למעשה התחלנו שרשרת חדשה.
באופן מעשי - l זהו הריבוי (הכי גבוה) של הערך העצמי.
שכן אם הפולינום המינימלי מתפרק ניתן ליצור לו בסיס של שרשראות ז'ורדן.

קיים פירוק יותר כללי לשרשראות ז'ורדן, אם הפולינום המינימלי לא מתפרק הוא פירוק פרימארי אותו משיגים ביחס לפירוק של הפולינום לפולינומים אי פריקים. וזהו פירוק פרימארי (כי הוא נעשה על פולינומים אי פריקים).