27.5.08

הערה: דומים לא בהכרח בגלל שאם g הוא איזומורפיזם אז gig ו-ig דומים (לפי g). בשביל שהתמונות של תתי המרחבים gig ו-ig יהיו אותו דבר, כלומר אם אני רוצה את gig שיהיה אותו דבר ig המרחב הזה מוכרח g לשמר $\ker ig$ והתנאי הזה שם אני מקבל את ההגדרה המלאה של $\ker ig$ אבל הבעיה שזה לא אם שאין $\ker$ מקבל 0 (התחום הקריטי שלו $\ker g$). מבחינה לא נמוך לחלוט תני מחרוזת שמאוד פרט כבר. מבחינה הלשכה שלה מחרוזת אחרת נעשה לי בישלם ב הבסיס שלו ונקבל (לדוגמא) מתחת כך יהיה 0 : $\begin{pmatrix} X & X \\ 0 & X \end{pmatrix}$.

פירוק לסכום ישר שמור T - שמור

הגדרה - תהי $T: V \to V$ טרנספורמציה לינארית. נאמר $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_k$ זה פירוק ישר של V נקרא פירוק ישר T - שמור אם כל V_i הוא T שמור לכל i.

מסקנה: $T = T_1 \oplus \dots \oplus T_k = \begin{pmatrix} T_1 & & & \\ & T_2 & & \\ & & T_3 & \\ & & & \ddots \\ & & & & T_k \end{pmatrix} = \operatorname{diag}(T_1, \dots, T_k)$

T_i - טרנספורמציה לינארית מתאימה ל V_i.

אפשר מעכשיו לבנות לעשות אם לוקחת בסיס מתאים.

תיאור מדויק: נמצא בסיס $B_i = \{v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{in_i}\}$ $\forall i.\ n_i = \dim V_i$

$$B = \bigcup_{i=1}^{k} B_i = \{v_{11}, \dots, v_{1n_1}, v_{21}, \dots, v_{2n_2}, \dots, v_{k1}, \dots, v_{kn_k}\}$$

אז

$$[T] = \begin{pmatrix} [T_1]_{B_1} & & & \\ & [T_2]_{B_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & [T_k]_{B_k} \end{pmatrix}$$

כלומר כל מטריצה מתאימה את הטרנספורמציה הלינארית של $[T_i]_{B_i}$ יש 0 לצדדי ואחרי נשאר שם הוקטורים שקשורים לבסיס שלו. בלעדיהם מעבירים את השורה ב-0 כי הוכחה של הטרנספורמציה חיה ואז בלבד הוקטורים של B_i.

בפרט יהי $p(x) \in \mathbb{F}[x]$ ותסתכל ב $p(T)$ אז הפירוק $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_k$ זה הוא פירוק T-שמור גם מתקיים $p(T)|_{V_i} = p(T|_{V_i}) = p(T_i)$ ולכן $p(T) = \begin{pmatrix} p(T_1) & & \\ & \ddots & \\ & & p(T_k) \end{pmatrix}$

בהתאמה מתקבל

$$[p(T)]_B = \begin{pmatrix} [p(T_1)]_{B_1} & & \\ & \ddots & \\ & & [p(T_k)]_{B_k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p([T_1]_{B_1}) & & \\ & \ddots & \\ & & p([T_k]_{B_k}) \end{pmatrix}$$

$$M_T = \operatorname{lcm}(M_{T_1}, \dots, M_{T_k})$$

את זה נוכל לבדוק ב-2 דרכים: (1) אחרי הוכחה שהיינו לנו בהתאמה (2) לפי טרנספורמציה מתאימה תצטרך כי לכל אחת מהן $M_{T_i} = \operatorname{lcm}(\dots)$.

משפט פירוק בעזרת לפולינום מינימלי -

יהי $T: V \to V$ העתקה לינארית כאשר V מרחב וקטורי בעל מימד סופי מעל שדה $\mathbb{F}$. יהי $m_T(x) = p_1(x)^{n_1} \cdots p_k(x)^{n_k}$ פירוק של $m_T(x)$ לגורמים אי-פריקים מתוקנים כאשר הם שונים זה מזה. (הפולינום הנמוך הכי $p_i(x)^{n_i}$ $\forall i.$ הוא גורם מאיזשהו).

ונסמן $V_i = \ker(p_i(T)^{n_i})$ $\forall i.$ אז:

(1) $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_k$ הוא פירוק ישר T- שמור

(2) אם נסמן $\forall i.\ T_i = T|_{V_i} : V_i \to V_i$ אז $m_{T_i} = p_i^{m_i}$

הוכחה -

נישם את משפט הפירוק הכללי באופן $\forall i.\ q_i = p_i^{m_i}$ אשר לפי מאשר.

המשפט תהיה $m_T = p_1^{m_1} \cdot p_2^{m_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{m_k} = q_1 \cdot \ldots \cdot q_k = q$

לכן: $V = \ker q(T) = \ker M_T(T)$

כי q הוא הפולינום המינימלי

$$\ker q(T) = \bigoplus_{i=1}^{k} \ker(q_i(T)) = \bigoplus_{i=1}^{k} \ker(p_i^{m_i}(T)) = \bigoplus_{i=1}^{k} (p(T)^{m_i}) = \bigoplus_{i=1}^{k} V_i$$

מהמשפט הפירוק הכללי

נראה כי V_i הוא T-שמור לכל i ושמתקיים $\ker(p_i^{m_i}(T)) = V_i$

לכן $p_i^{m_i}(T) = p_i^{m_i}(T|_{\ker p_i^{m_i}(T)}) = 0$

לפי הגדרה המינימום של הפולינום

לכן M_T מתחלק ב $p_i^{m_i}$ $\forall i$. נגדיר לחלוקה שהם שווים.

נעקיב שוויון $m_{T_i} = p_i^{m_i}$ כאשר $0 \le m_i \le m_i$ $\forall i$ (נצרך להוכיח כי $m_i = m_i$)

ראינו כבר ש- $m_T = \mathrm{lcm}(m_{T_1}, \ldots, m_{T_k}) = \mathrm{lcm}(p_1^{m_1}, \ldots, p_k^{m_k}) = p_1^{m_1} \cdot p_2^{m_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{m_k}$

ומיחידות הפירוק של m_T נובע $m_i = m_i$ $\forall i$

נספח 3 - לכסון מטריצות ופולינום האופייני

הערה - מעתה המרחבים בה מטריצה נבנה לכסון ושם תשאם מאוד מכוונים שלא מה שעשינו שיוכל לא נגיע לכסון.

דוגמה

(1) מטריצות דומות - תהיינה A, B מטריצות מסדר n $A, B \in M_n(\mathbb{F})$. אז A נקרא "דומה" לם אם קיימת מטריצה הפיכה $S \in M_n(\mathbb{F})$ כך ש $A = SBS^{-1}$. נסמן $A \sim B$.

S אם קיימת אינה יחידה. נשים לב שמתקיים - $A \sim A$: כי $A = I_n A I_n^{-1}$

$A \sim B \Leftrightarrow B \sim A$: $A = SBS^{-1}$

$B = S^{-1}AS = S^{-1}A(S^{-1})^{-1}$

$A \sim B$, $B \sim C \Rightarrow A \sim C$:

$A = S_1 B S_1^{-1}$ $B = S_2 C S_2^{-1}$

$$A = S_1 \cdot S_2 C S_2^{-1} S_1^{-1} = (S_1 S_2) C (S_1 S_2)^{-1}$$

לזה טוב כי אנו נוכל לחשב את B בקלות יותר ונוכל לבטא מטריצה A.

לדוגמה - $A = SBS^{-1}$ מתקיים: $A^2 = (SBS^{-1})(SBS^{-1}) = SB^2S^{-1}$

($S^{-1}S = I$ מבטיח) ולאופן כללי עבור פולינום $q(x)$ מתקיים $q(A) = Sq(B)S^{-1}$

מסקנות: (א) אם $A \sim B$ אז $q(B) \sim q(A)$

(ב) אם $A \sim B$ אז $m_A = m_B$

(2) לכסון - $A \in M_n(\mathbb{F})$ נאמר לכסין אם קיימת $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ אלכסונית ו S הפיכה

כך ש $A = SDS^{-1}$ כלומר אם $A \sim D$.

לכסון של A הוא מצ'אר S הפיכה ו D אלכסונית כך ש $A = SDS^{-1}$ ומתקיים

$$q(A) = S \begin{pmatrix} q(\lambda_1) & & 0 \\ & q(\lambda_2) & \\ 0 & & \ddots \ q(\lambda_n) \end{pmatrix} S^{-1}$$

פ"ע בפולינום הלכסון

$A=SDS^{-1}$ לה שקולה ל- $AS=SD$ שגם משוואת שדות לינארית. יש לשים לב כי S חייב להיות הפיכה! D אלכסונית.

נסמן $D=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix}$, $S=\begin{pmatrix}| & & |\\ v_1 & \dots & v_n\\ | & & |\end{pmatrix}$ אז נוכל לרשום את המשוואה כך:

$$AS=A\begin{pmatrix}| & & |\\ v_1 & \dots & v_n\\ | & & |\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}| & & |\\ Av_1 & \dots & Av_n\\ | & & |\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}| & & |\\ \lambda_1 v_1 & \dots & \lambda_n v_n\\ | & & |\end{pmatrix}=SD$$

כך שמי שעונה לשאלה הזו n משוואות עצמאיות:

$$\forall i.\ Av_i=\lambda_i v_i$$

הנסמן לדוגמה בדיוק לזה שזנים מ-0 כי S הפיכה. אנו מעוניינים בוקטורים v_i שבכל שלילה וקטורים מתאים (אלו מסוג F^n).

וקטורים עצמיים וערכים עצמיים

הגדרה - וקטור עצמי של $A\in M_n(F)$ הוא וקטור $v\in F^n$ כך ש: (א) $v\neq 0_F$
(ב) $\exists\lambda\in F.\ Av=\lambda v$

v קולט את $\lambda v=Av$ ונקרא λ מתאים. נשים לב כי λ לא קולט את v מאלפן יחיד. אותה הא נקראת ערך עצמי ואומרים ש v מתאים ל λ מהאומה לה עצמי. וכל הוקטור עצמי יש ערך עצמי, אך לא לכל ערך עצמי יתכן וקטור עצמי. **סימון**: λ ערך עצמי אם $\ker(\lambda I-A)\neq 0$ כי אז $\lambda v=Av \Leftarrow v=0$ ונקבל $v\neq 0$ ומאחר ש λ ערך עצמי אז אותו הוקטורים העצמיים המתאימים ל λ הם $\ker(\lambda I-A)\setminus\{0\}$

מסקנה - (מסקנה) מטריצה $A\in M_n(F)$ ניתנת לכסון אם קיים בסיס F^n המורכב מוקטורים עצמיים של A.

הערה - לא A אין לנו הגבלה כלל רק על V.
נשים לב כי בסיס של S ו V מתאים לו בסיס המורכב S והאלכסון של D.

כיצד מוצאים ערכים עצמיים?
λ ערך עצמי אם הדטרמינטה שלה $\det(\lambda I-A)=0$ כך שעל מנת למצוא את הערכים העצמיים נמצא את $\det(\lambda I-A)$ ואם הוא שווה 0 אז λ הוא ערך עצמי ואז משוואה רגילה עם נוסחאות שבן לנשים ש הוא שמקיים את זה.

ריבוי אלגברי - לכל ערך עצמי ריבוי הוקטורים העצמיים שמתאימים לו מסומן ע"י הרישא אם λ ערך עצמי $g=\dim\ker(A-\lambda I)$ הוא הדרגה הגאומטרי של הערך העצמי λ וזה ≥ 1 מתאים [כי אם λ ערך עצמי אז $\ker(\lambda I-A)\neq 0$]

למה -
יהי $\lambda_1,\dots,\lambda_k$ מספרים שונים לא אחד מהשני $h(x)=(x-\lambda_1)\cdot\ldots\cdot(x-\lambda_k)$ אז
$$\ker(h(A))=\bigoplus_{i=1}^{k}\ker(\lambda_i I-A)$$
והמרחבים $\ker(A-\lambda_i I)$ נקראים המחוקים הפסקטרלים
הוכחה - כאשר חלקו הם תתי מרחבים של תת מרחב אינוריאנטי של אותו בעצמו בתוך מקרה שהתפרקות שמכיל, שבעצמו בתוך הם הדרגים העצמיים של הוקטורים של הערכים.

הוכחה - נוכל לבדוק הטענה ($\lambda_i - x$ שונים ונראים כך לכל כי אז שלילים ומאחר מתאימים מתאימים גם) אז $h(A)=\bigoplus_{i=1}^{k}\ker(x-\lambda_i)(A)=\bigoplus_{i=1}^{k}(A-\lambda_i I)=$
$$=\bigoplus_{i=1}^{k}\ker(\lambda_i I-A)$$

מסקנה

(1) **משפט 1** - וקטורים עצמיים המתאימים לערכים עצמיים השונים אז מלה הם בלתי

הוכחה - נניח הוקטורים העצמיים v_i $(1 \le i \le n)$ מתאימים לערכים העצמיים λ_i נקח נניח שמתקיים $a_1v_1 + \dots + a_kv_k = 0$

$a_iv_i \in \ker(\lambda_i I - A) \Leftarrow v_i \in \ker(\lambda_i I - A)$ לכל

מאחר ש $\ker(h(A)) = \bigoplus_{i=1}^{k} \ker(\lambda_i I - A)$ סכום ישר נקבל $\forall i,\ a_i = 0$

(2) משפט 2 - למטריצה $A \in M_n(F)$ יש לכל היותר n ערכים עצמיים.

הוכחה - נניח $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ ערכים עצמיים השונים זה מזה של A. נסמן

$g_i = \dim(\ker(\lambda_i I - A))$

ונראה כי $\sum_{i=1}^{k} g_i \le n$ הסכום הזה של g_i הוא מספר הוקטורים

העצמיים של λ_i והם בת"ל. אם $\sum_{i=1}^{k} g_i > n$ אין n כאלו אז לא נתן לבסיס

אך המטריצה כי אין מספיק וקטורים עצמיים בת"ל.

משום ש $\ker(\lambda_i I - A) \cap \ker(\lambda_j I - A) = \emptyset$ תמיד.

(3) משפט 3 - אם $A \in M_n(F)$ יש n ערכים עצמיים שונים זה מזה אז הוא לא-ניתן לאלכסון.

הוכחה - נניח λ_i ערכים עצמיים שונים זה מזה. יהי v_i וקטורים עצמיים מתאימים ל λ_i (לכל i) אז $v_1, \dots, v_n$ מהווים בסיס ל F^n ונקבל מיפוי מכסה F^n של v_i.

(4) משפט 4 - תהי $A \in M_n(F)$ $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ ערכים עצמיים שונים של A וגם $g_1, \dots, g_k$ הוקטורים האופטימליים המתאימים. $\sum_{i=1}^{k} g_i \le n$ ותנאים הבאים שקולים

(א) A לא-ניתן לאלכסון

(ב) $F^n = \bigoplus_{i=1}^{k} \ker(\lambda_i I - A)$

(ג) $F^n = \sum_{i=1}^{k} \ker(\lambda_i I - A)$

(ד) $\sum_{i=1}^{k} g_i = n$

(ה) קיים פולינום מתוכנן עם שורשים פשוטים $h(x) \in F[x]$ כך ש $h(A) = 0$.

(1) M_A מתפצל ושורשיו כולם פשוטים.

(2) $M_A(x) = \prod_{i=1}^{k} (x - \lambda_i)$

הוכחה -

א' ← ב' : כי יש בסיס של k וקטורים עצמיים

ב' ← ג' : לפי $h(A) = \bigoplus_{i=1}^{k} \ker(\lambda_i I - A)$

ג' ← ד' : מאוגדת סיגמה

ד' ← ה' : מסמוכי הלמה $h(x)$ מתפצל עם שורשים פשוטים וגם $h(A) = 0$ כי הוא סכום ישר של $\ker(\lambda_i I - A)$.

ה' ← ו' : משום ש $M_A(x)$ מחלק את $h(A)$.