22.5.08

מוטיבציה

אלגברה לינארית אפשר לתאר ב-2 מימדים: טרנספורמציה לינארית ומטריצות. כשמדברים [?] שונים הדברים הם אותו דבר, כי לכל טרנספורמציה יש מטריצה שמתארת אותה, אבל מבחינה רעיונית שונים. טרנספורמציה לינארית היא סוג של פונקציה. ניתן לחשוב עליה כמחשבה וכפעולה [?]. לעומת זאת ניתן לעבוד במימדים עם מטריצות. גם כל החישובים נעשים על מטריצות. יש מושגים שניתן להגדיר רק עבור אחד מתוך השניים ויש צורך להשוות ולהראות שההגדרות שקולות.

פולינום מינימלי של טרנספורמציה לינארית

תהי $T: V \to V$ טרנספורמציה לינארית (V מ"ו מעל $\mathbb{F}$, $n = \dim V < \infty$).

נסמן $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ בסיס של V.

קואורדינטות - $$[v]_B = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \iff v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n \qquad (v \in V)$$

$a_i \in \mathbb{F}$

המטריצה של T: $[T]_B = [T]_B^B$

א) אפיון - $$[T]_B^B [v]_B = [Tv]_B \qquad (\forall v \in V)$$

ב) תיאור - $$[T]_B^B = \begin{pmatrix} | & & | \\ [Tv_1]_B & \dots & [Tv_n]_B \\ | & & | \end{pmatrix}$$

מתקיים - $$[T^2]_B = [T]_B^2$$

בדיקה: $$\underbrace{[T]_B([T]_B[v]_B)}_{[T^2]_B} = [T]_B[Tv]_B = [T^2 v]_B$$

באופן כללי - $$(\forall p \in \mathbb{F}[X]) \quad [p(T)]_B = p([T]_B)$$

מסקנה - $p(T) = 0 \iff 0 = [p(T)]_B \iff 0 = p([T]_B) \iff p$ מתחלק ב-$M_{[T]_B}$ (הפולינום המינימלי של המטריצה לפי בסיס B)

> מכאן שאם $T: V \to V$ טרנספורמציה לינארית כך ש-$\dim V < \infty$ אז קיים פולינום מתוקן אחד ויחיד M_T כך ש- $q(T) = 0 \iff q$ מתחלק ב-M_T לכל $q \in \mathbb{F}[X]$.
> וכמו כן הפולינום $M_T = M_{[T]_B}$ לכל בסיס B של V. $\deg M_T \geq 1$.
> מינוח - M_T הוא פולינום מינימלי של T

אם מימד V אינסופי אז יתכן מצב שמימד הפולינום המינימלי הוא 0, אבל לזה לא נגיע [?].

משפט פירוק כללי (פרק 2)

מדובר בפירוק של תתי מרחב לסכום ישר של תתי מרחבים.

משפט- יהי V מרחב וקטורי מעל F ממימד סופי ! ו-$V_1,\dots,V_k$ תתי מרחב של V. אז התנאים הבאים שקולים:

(1) אם נסמן $V=V_1+V_2+\dots+V_k$ אז $V=V_1\oplus V_2\oplus\dots\oplus V_k=\bigoplus_{i=1}^k V_i$

(2) אם $v_1+\dots+v_k=0$ כאשר $\forall i.\ v_i\in V_i$ אז $\forall i.\ v_i=0$

(3) $\dim(V_1+\dots+V_k)=\sum_{i=1}^k \dim V_i$

(4) אם $B=\{v_{i1},v_{i2},\dots,v_{in_i}\}$ בסיס של V_i, $\dim V_i=n_i$ $(1\le i\le k)$ אז הסדרה
$\underbrace{v_{11},\dots,v_{1n_1}}_{B_1},\underbrace{v_{21},\dots,v_{2n_2}}_{B_2},\dots,\underbrace{v_{k1},\dots,v_{kn_k}}_{B_k}$
היא בלתי תלויה (ובמקרה זה היא בסיס ל $V_1+\dots+V_k$ כי היא פורשת את הסכום)

סכום ישר- תנאי שמרחב וקטורי מקיים ביחס לתתי המרחב שלו. התנאי הוא שהסכום שווה ל V ולכל $v\in V$ יש תאור יחיד $\forall v_i\in V_i.\ v=\sum_{i=1}^k a_iv_i$.

סכום (מוכלל) - פעולה של תתי המרחבים - $\sum_{i=1}^k V_i=\{\sum_{i=1}^k v_i \mid v_i\in V_i\}$

במידה ותתי המרחב הם סכום ישר אז הם בלתי תלויים (זה שקול).
מעשית סכום ישר הוא סכום שמקיים תנאים מסוימים.

הוכחת השקילות:

$1\to2$: 2 שקול ליחידות הפירוק היחיד של 0 ב V (סכום ישר $\forall v\in V=\sum_{i=1}^k a_iv_i$ $(v_i\in V_i)$)

$2\to4$: נניח ש... $v_i=a_{i1}v_{i1}+\dots+a_{in}v_{in}$, $v_i\in V_i$
(כלומר כל וקטור ב V ניתן לתאור יחיד ע"י $\sum_{i=0}^k\sum_{j=0}^{n_i} a_{ij}v_{ij}$.

$4\to3$: ע"י ספירת איברים בבסיס כי הבסיס מלא ולכן הוא בסיס אז הוקטורים הם מימד המרחב V.

הערה- במידה ויש 0 לא הופך את המרחב להיות תלוי משום שאז הבסיס שלו יהיה $\emptyset$ ו $\dim=0$ ולכן לא משפיע על השאר.

תזכורת הגדרות:

$T:V\to W$ טרנספורמציה לינארית

$\ker T=\{v\in V\mid Tv=0\}$ תת מרחב של V

$\operatorname{Im} T=\{Tv\mid v\in V\}$ תת מרחב של W

משפט הפירוק הכללי:

תהי $T:V\to V$ כאשר V מרחב וקטורי ממימד סופי מעל F ויהיו $q_1,\dots,q_k$ פולינומים זרים בזוגות ונסמן $q=q_1\cdots q_k$ אז:

$$\ker(q(T))=\bigoplus_{i=1}^k\ker(q_i(T))$$

הוכחה - ראשית $\forall i.\ \ker q_i(T)\subseteq\ker(q(T))$.
אם $v\in\ker(q_i(T))\Rightarrow q_i(T)v=0\Rightarrow$

$q(T)=(q_1\cdots\hat{q}_i\cdots q_k\cdot q_i)(T)v=$
$=q_1\cdots\hat{q}_i\cdots q_k)(T)\cdot q_i(T)v=0$

מכאן נובע $v\in\ker(q(T))$.

כמו כן, ידוע שקיימים $f_1,\dots,f_k\in F[x]$ כך ש $\sum_{i=1}^k b_iq_1\cdots\hat{q}_i\cdots q_k=1$
(כי הם זרים בזוגות - מתאור של זרים בזוגות).

$g(T)v$ - הסבר

נניח $g(x)=a_nx^n+\dots+a_1x+a_0$ אז

$g(T)=a_nT^n+\dots+a_1T+a_0I_v$

$g(T)v=g(T)(v)=a_n\underbrace{T(T(T\dots)\dots)}v+\dots+a_2T(T(v))+a_1T(v)+a_0v$

המשך ההוכחה:

כעת נוכיח $\sum_{i=1}^{k} \ker(q_i(T)) = \ker(q(T))$

כבר הראינו $\ker(q_i(T)) \subset \ker(q(T))$ נותר רק שהראות הכלה הפוכה על מנת להוכיח שוויון.

יהי $u \in \ker q(T)$ אז $u = I_V u = ((1)(T))(u) = \sum_{i=1}^{k} (b_i q_1 \ldots \hat{q}_i \ldots q_k)(T)(u)$

טרנספורמציית הזהות

נסמן $u_i = (b_i q_1 \ldots \hat{q}_i \ldots q_k)(T)(u)$ $\forall i$. מהסימון נוכל לרשום במקום u_i.

די להוכיח (מהסימון) $\forall i. u_i \in \ker(q_i(T))$

אכן, $q_i(T)(u_i) = q_i(T)(f_i q_1 \ldots \hat{q}_i \ldots q_k)(T)(u) = (q_i f_i q_1 \ldots \hat{q}_i \ldots q_k)(T)(u) =$
$= (f_i q_1 \ldots q_k)(T)(u) = (b_i q)(T)(u) = b(T) q(T) u =^{*} b(T) \cdot 0 = 0$

לכן $\ker(q(T))$ מוכל ב-$\sum_{i=1}^{k} \ker(q_i(T))$ ולכן יש שוויון.

*נשים לב ש-$u \in \ker q$ אז $q(T)u = 0$.

כאשר שקילות 1 כבר הוכחה את השקילות די להראות
$v_1 + \ldots + v_k = 0$ כאשר $\forall i. v_i \in \ker q_i(T)$ $\longleftarrow$ $\forall i. v_i = 0$ (שזה שקילות 2)

נשים לב שבלי הגבלת הכלליות נוכיח עבור $v_1 = 0$

$v_1 = I_V v_1 = ((1)(T)) v_1 = \sum_{i=1}^{k} (b_i q_1 \ldots \hat{q}_i \ldots q_k)(T) v_1 = (f_1 q_2 \ldots q_k)(T)(v_1) =$

נשים לב שכל איבר בסכום חוץ מהראשון יש מכפלה עם q_1 ולכן ש-$q_1(v_1) = 0$ ונשים לב שזו מכפלה ולכן מאפס את כל השאר.

$= -\sum_{i=2}^{k} (f_1 q_2 \ldots q_k)(T)(v_i) = 0$

מההנחה $\sum v_i = 0$

וכאן נשים לב שלכל v_i קיים q_i מתאים כך ש-$q_i(v_i) = 0$ וזה מאפס את כל המכפלה.

תת מרחב T-שמור (או T אינווריאנטי) T-invariant Subspace

הגדרה: יהי $T: W \to W$ טרנספורמציה לינארית, $V \subset W$ תת מרחב של V

נקרא T שמור אם $\{Tv \mid v \in V\} \underset{def}{=} T(V) \subseteq V$

או במילים אחרות $v \in V \Longrightarrow Tv \in V$.

אפשר ש-$w \in W$, $w \notin V$ אבל $Tw \in V$ איך זה יתכן שהטרנספורמציה תוציא איבר מ-V.

דוגמה - W ו-O דוגמא הם תתי מרחב T שמורים הטריוויאלים.

הערה - אם $g(x) \in \mathbb{F}[x]$ אז $\ker(g(T))$ הוא T-שמור ובאופן כללי תתי המרחבים שהוספנו הם T-שמורים כי $v \in \ker(g(T))$ $\Leftarrow$ $g(T)v = 0$ $\Leftarrow$ $g(T)Tv = Tg(T)v = 0$

$\Leftarrow Tv \in \ker(g(T))$

מסקנה - אם $T, R: W \to W$ טרנספורמציות לינאריות מתחלפות $TR = RT$ אז לכל 2 פולינומים $g(x), h(x)$, תתי המרחב $\operatorname{Im} g(T)$, $\ker g(T)$ הם $h(R)$-שמורים (המקרה הקודם $R = T$ ו-$h(x) = x$).

אם $T: W \to W$ טרנספורמציה לינארית ו-$V \subset W$ תת מרחב T-שמור אז יש

העתקה מצומצמת מתחום וטווח $T|_V: V \to V$ שהוא $\forall v \in V\ (T|_V)(v) = Tv$

והיתרון של הצמצום הוא שאנו יכולים להפעיל את הטרנספורמציה הנ"ל כמה וכמה פעמים על עצמה.

תכונה - לכל פולינום f מתקיים $f(T|_V) = f(T)|_V$.

תכונה הטריוויאלית של צמצום על תת מרחב מהסוג $\ker(f(T))$

$$f\left(T|_{\ker f(T)}\right) = f(T)|_{\ker f(T)} = 0_{\ker f(T)}$$

כלומר הפולינום של ההעתקה המצומצמת על הגרעין שלה הוא פולינום האפס, כי הוא פועל רק על איברים שהפולינום מעביר ל-0 כפי הצמצום.

מסקנה: הפולינום המינימלי $m_{T|_{\ker f(T)}}$ מחלק את f.

למה אם כל המרחב שלי הוא הוא $\ker$ ניתן לפרק לתתי מרחבים של פולינומים אי פריקים

תאור מטריצי

תהי $T:W\to W$ טרנספורמציה לינארית כך ש $n=\dim W<\infty$
ויהי $V\subset W$ תת מרחב ונסמן $m=\dim V$.
כדי לענות על השאלה האם V הוא T-שמור אנחנו בוחרים את הבסיס המתאים שלו.
נבחר $B_V=\{u_1,\dots,u_m\}$ בסיס של V ונשלים אותו לבסיס של W $B=\{u_1,\dots u_m,\dots u_n\}$
אז V הוא T-שמור אם"ם למטריצה שלו $[T]_B\in M_n(\mathbb{F})$ יש לה הצורה הבאה:

$$[T]_B=\begin{array}{c} \\ m\{ \\ n-m\{ \end{array}\begin{array}{cc} \overbrace{\quad}^{m} & \overbrace{\quad}^{n-m} \\ \multicolumn{2}{c}{\left(\begin{array}{c|c} * & * \\ \hline 0 & * \end{array}\right)} \end{array}=\begin{pmatrix} | & & | \\ [Tv_1]_B & \cdots & [Tv_n]_B \\ | & & | \end{pmatrix}=\left(\begin{array}{c|c} [T|_V]_{B_V} & * \\ \hline 0 & * \end{array}\right)$$

אם $v_1\in V$ אז הוא יהיה צירוף של u_i $1\le i\le m$ וכל השאר אפסים עד ל Tv_m
והחל מ Tv_{m+1} ל Tv_n יש $*$ כי אחרת גם הוקטורים אלו יהיו בV, אך הם אמורים
לא להיות בV משום שV מימדו m ; $m<n$ (אם אין שם אפסים אז $m=n$).

פירוק ישר T-שמור: פירוק ישר כך שכל אחד מתתי המרחבים שלו הוא
T-שמור.