13.5.08 ①

אלגברה לינארית

שיעור 2 עם אשר בן-ארצי

פולינומים של בלוקי ז'ורדן ומטריצות ז'ורדן

© סימון

$$(\lambda\in F)\quad J_{n,\lambda}=J_n(\lambda)=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & & 0\\ & \lambda & \ddots & \vdots\\ & & \ddots & 1\\ 0 & & & \lambda\end{pmatrix}\in M_n(F)$$

דוגמאות:

$$J_3(7)=\begin{pmatrix}7&1&0\\0&7&1\\0&0&7\end{pmatrix}\qquad J_4(-1)=\begin{pmatrix}-1&1&0&0\\0&-1&1&0\\0&0&-1&1\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$$

$$J_n(0)=\begin{pmatrix}0&1&&0\\&0&\ddots&\\&&\ddots&1\\0&&&0\end{pmatrix},\qquad J_3(0)=\begin{pmatrix}0&1&\\&0&1\\&&0\end{pmatrix}$$

סימון: $N=J_n(0)F\quad \begin{pmatrix}0&1&&\\&\ddots&\ddots&\\&&&1\\&&&0\end{pmatrix}\in M_n(F)$

© יהי $p(x)=c_k\cdot x^k+\dots+c_1\cdot x+c_0\in F[x]$

תכונה של N:

$$N^3=\begin{pmatrix}\overbrace{0\;0\;0}^{3\text{ אפסים}} & 1 & \\ & \ddots & 1\\ & & 0\\ & & 0\end{pmatrix}\qquad N^2=\begin{pmatrix}\overbrace{0\;0}^{2\text{ אפסים}} & 1 & \\ & \ddots & 1\\ & & 0\\0 & & 0\end{pmatrix}$$

דוגמה: את $N=J_4(0)$

$$N^2=\begin{pmatrix}0&1&&\\&0&1&\\&&0&1\\&&&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1&&\\&0&1&\\&&0&1\\&&&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=0$$

$$N^n=0\quad,\quad N^{n-1}=\begin{pmatrix}0&\dots&0&1\\&&&0\\&&\ddots&\vdots\\&&&0\end{pmatrix}$$

אפשר להניח (ע"י הוספת $0=c_{k+1}=c_{k+2}=\dots$) ש: $n\le k$,

$$p(N)=\begin{pmatrix}c_0 & c_1 & c_2 & \dots & c_{n-1}\\ & \ddots & \ddots & & \vdots\\ & & \ddots & & c_2\\ & 0 & & \ddots & c_1\\ & & & & c_0\end{pmatrix}$$

מציב את הפולינום

$$p(N)=c_k\cdot N^k+\dots+\overbrace{c_1\cdot N}^{1\text{ מעל האלכסון}}+\underbrace{c_0\cdot I}_{\text{על האלכסון}}$$

© כדי לחשב את $P(J_n(\lambda))$ נשים לב ש:

$$J_n(\lambda)=\lambda\cdot I+N$$

כלומר

$$J_n(\lambda)-\lambda\cdot I=N$$

לכן (נמשיך להניח $n\le k$) ונקבל:

$$p(x)=c_n\cdot x^n+\dots+c_1\cdot x+c_0=$$

$$=a_n\cdot(x-\lambda)^n+a_{n-1}\cdot(x-\lambda)^{n-1}+\dots+a_1\cdot(x-\lambda)+a_0$$

מקבלים את ע"י:

$$p(x)=c_n\cdot x^n+\dots+c_1\cdot x+c_0=c_n\cdot[(x-\lambda)+\lambda]^n+c_{n-1}\cdot[(x-\lambda)+\lambda]^{n-1}+\dots+$$

$$+c_1\cdot[(x-\lambda)+\lambda]+c_0$$

ופותחים סוגריים מרובעים

$$\varphi(J_n(\lambda)) = c_n \cdot J_n(\lambda)^n + \dots + c_0 I =$$
$$= a_n \cdot (J_n(\lambda) - \lambda I)^n + \dots + a_1 \cdot (J_n(\lambda) - \lambda I) + a_0 I =$$
$$= a_n \cdot N^n + \dots + a_1 \cdot N + a_0 = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & a_1 \\ 0 & & & a_0 \end{pmatrix}$$

③ <u>סימון:</u> מטריצת בלוק היא מטריצה מהצורה:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & A_2 & \\ 0 & & \ddots \ A_t \end{pmatrix} = A_1 \oplus \dots \oplus A_t = \operatorname{diag}(A_1, \dots, A_t)$$

כאשר $A_1, \dots, A_t$ ריבועיות.

אם כ"א מ-$A_1, \dots, A_t$ בלוק ז'ורדן אז נקרא מטריצת ז'ורדן

<u>דוגמא:</u> בלוק ז'ורדן (x): $J_1(\lambda) = (\lambda)_{1\times 1}$

כל מטריצה אלכסונית היא מטריצת ז'ורדן עם בלוקים 1x1

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} \mu_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_n \end{pmatrix}}_{\text{אלכסונית}} = \begin{pmatrix} J_1(\mu_1) & & \\ & \ddots & \\ & & J_1(\mu_n) \end{pmatrix}$$

<u>דוגמא:</u>

הבלוקים הם ז'ורדן

$$J_4(2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & & \\ & 2 & 1 & \\ & & 2 & 1 \\ & & & 2 \end{pmatrix} \neq \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & & \\ & 2 & 0 & \\ \hline & & 2 & 1 \\ & & & 2 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} J_2(2) & \\ & J_2(2) \end{pmatrix}$$

פולינום של מטריצת בלוק אלכסונית:

$$p\begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p(A_1) & & 0 \\ & p(A_2) & \\ 0 & & \ddots \ p(A_t) \end{pmatrix}$$

<u>כללי ההצבות:</u>

תהי k אלגברה עם יחידה מעל F

$p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^i \in F[x]$, $q(x) = \sum_{j=0}^{m} b_j \cdot x^j$, $\alpha \in k$:

① $(p \pm q)(\alpha) = p(\alpha) \pm q(\alpha)$.

② $(c \cdot p)(\alpha) = c \cdot p(\alpha)$

③ $(p \cdot q)(\alpha) = p(\alpha) \cdot q(\alpha)$ <u>הערה:</u> נובע ש-$p(\alpha)$ ו-$q(\alpha)$ מתחלפים: כי $p \cdot q = q \cdot p$

④ $(p^k)(\alpha) = p(\alpha)^k$ $(k = 0, 1, 2, \dots)$

⑤ אם נסמן $h = q(p) = \sum_{j=0}^{m} b_j \cdot p^j(x)$

$h(\alpha) = q(p(\alpha))$

<u>הגדרה:</u> אם K שדה המכיל את F, $p(x)\in F[x]$, $\lambda\in K$ ו- $p(\lambda)=0$ אז λ נקרא שורש של p ב-K, ואם $F=K$ אומרים ש-λ שורש של p.

<u>תזכורת!</u> מטריצה אינה שורש.

חילוק פולינומים

<u>דוגמה:</u>

$$\begin{array}{l} \frac{3}{2}x^2-\frac{1}{4}x-\frac{9}{8} \\ \hline 3x^4+x^3-x^2+4x+7 \;\big|\; 2x^2+x+1 \\ -(3x^4+\frac{3}{2}x^3+\frac{3}{2}x^2) \\ \hline -\frac{1}{2}x^3-\frac{5}{2}x^2+4x+7 \\ -(-\frac{1}{2}x^3-\frac{x^2}{4}-\frac{x}{4}) \\ \hline -\frac{9}{4}x^2+\frac{17x}{4}+7 \\ -(-\frac{9}{4}x^2-\frac{9}{8}x-\frac{9}{8}) \\ \hline \frac{43}{8}x+\frac{65}{8} \end{array}$$

האלגוריתם נעצר כאשר מעלת השארית קטנה ממעלת <u>המחלק</u>.

$$\underbrace{(3x^4+x^3-x^2+4x+7)}_{\text{מחולק}}-\underbrace{(2x^2+x+1)}_{\text{מחלק}}\cdot\underbrace{\left(\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{4}x-\frac{9}{8}\right)}_{\text{מה שקיבלנו, המנה}}=\underbrace{\frac{43}{8}x+\frac{65}{8}}_{\text{שארית}}$$

$$\begin{cases} \text{שארית} + \text{מחלק}\cdot\text{מנה} = \text{מחולק} \\ \deg(\text{מחלק}) > \deg(\text{שארית}) \end{cases}$$

<u>משפט החילוק:</u> יהיו $p,q\in F[x]$ כך ש-$q\neq 0$ אז קיימים $R,S\in F[x]$ יחידים כך ש:

① $p=R\cdot q+S$. ② $\deg S<\deg q$

<u>הוכחה:</u> הקיום נובע מאלגוריתם החילוק (חילוק p ב-q).

נוכיח יחידות: נניח $p=R'\cdot q+S'$, $\deg S'<\deg q$.

אז: $R\cdot q+S=p=R'\cdot q\cdot S'$ $\Leftarrow$ $q\cdot(R-R')=S'-S$

$\Leftarrow$ $\deg q+\deg(R-R')=\deg(S'-S)<\deg q$

כי כל אחד מהם קטן ממש ממעלת q.

אבל $q\neq 0$ ולכן $\deg q$ סופי, לכן $\underbrace{\deg(R-R')}_{\text{רק כך יהיה שוויון}}=-\infty$ (הפולינום האפס).

$\Leftarrow R=R' \Leftarrow S=S'$.

<u>הערה:</u> אפשר לחלק בפולינום $\neq 0$.

<u>מסקנות:</u>

① אפשר לדבר על "מנת החילוק" ו-"שארית החילוק" (בשל היחידות)

<u>למשל:</u> $q\neq 0$ מחלק את p $\Leftrightarrow$ שארית החילוק של p ב-q היא 0

② <u>חילוק ב- $x-\lambda$:</u> נניח $p\in F[x]$, $\lambda\in F$, נחלק את $p(x)$ ב- $x-\lambda$:

$p(x)=R(x)\cdot(x-\lambda)+S(x)$

ו- $\deg S(x)<\deg(x-\lambda)=1$ $\Leftarrow$ $S(x)=c$ פולינום קבוע.

לכן: $p(x)=R(x)\cdot(x-\lambda)+c$

נציב $x=\lambda$: $p(\lambda)=R(\lambda)\cdot(\lambda-\lambda)+c=c$ הצבה של $x=\lambda$

$p(\lambda)$ - האיבר החופשי בפיתוח טיילור

סה"כ: $p(x)=R(x)(x-\lambda)+p(\lambda)$

<u>משפט:</u> בסימונים אלה:

λ שורש של p $\Leftrightarrow$ p מתחלק ב-$x-\lambda$. $\Leftarrow$ השארית היא ס $p(\lambda)=0$ (λ שורש של p)

$\Leftarrow$ ונציב נקבל אגפים שווים: $p(x)-p(\lambda)$ מתחלק ב-$x-\lambda$.

<u>פולינומים אי-פריקים</u>

<u>הקדמה:</u> $120=2^3\cdot3\cdot5=(-2)^3\cdot(-3)\cdot5=(-1)\cdot2^3\cdot3\cdot(-5)$.

<u>תזכורת:</u> אם $0\neq p(x)=a_nx^n+\dots+a_0$ ממעלה n אזי: $0\neq a_n=$ המקדם הראשי

אם $a_n=1$ אומרים ש-p פולינום מתוקן (מוני, monic) אז p נקרא מתוקן

<u>תיקון פולינומים:</u> אם $p(x)=a_nx^n+\dots+a_0$ $(a_n\neq0)$. אז "נתקן" p נקבל

את $a_n^{-1}\cdot p(x)=x^n+\frac{a_{n-1}}{a_n}\cdot x^{n-1}+\dots+\frac{a_0}{a_n}$ שיקרא הפולינום המתוקן המצורף

של $p(x)$.

<u>הגדרה:</u> $p,q\in F[x]$ נקראים צמודים (או שקולים $p\sim q$) אם קיים קבוע

$0\neq c\in F$ כך ש- $p=cq$ ואז $q=c^{-1}p$

<u>הערה:</u> $p\sim q \Leftrightarrow p$ מחלק את q

ו-q מחלק את p

<u>הוכחה:</u>

"$\Leftarrow$" לפי הגדרה של פולינומים שקולים

"$\Rightarrow$": אם $p=0$ או $q=0$ נקבל $p=q=0$ ואז $p\sim q$

לכן, נניח $p\neq0, q\neq0$ אז יש $h,k\in F[x]$ כך ש: $q=k\cdot p$, $p=hq$

לכן: $p=h\cdot k\cdot p$ מכאן: $0\leq\deg p=\deg h+\deg k+\deg p$

$\boxed{p\neq0}$ $\Leftarrow$ $\deg h=\deg k=0$ $h,k\in$ הפיכים

<u>פולינומים צמודים אותן תכונות החלוקה</u>

<u>למה:</u> אם $p,p_1,q,q_1\in F[x]$ ואם $q\sim q_1$, $p\sim p_1$ אז

q מחלק את p אם ורק אם q_1 מחלק את p_1. —

<u>הערות נוספות:</u>

① אם p,q מתוקנים וצמודים אז $p=q$.

② כל פולינום שקול לפולינום מתוקן יחיד.

③ <u>קביעת פולינום מתוקן ע"י מחלקיו:</u> אם p_1,p_2 מתוקנים ואם מתקיים: p מחלק את p_1 $\Leftrightarrow$

13.5.08 (5)

q ⟸ מחלק את p_2 לכן פולינום q אז $p_1=p_2$ (נשים לב שהפולינומים מתוקנים)

[illegible]

<u>משפט:</u> אהי $\phi\neq S\subset F[x]$. אז קיים פולינום יחיד $g=g.c.d.(S)\in F[x]$

כך ש: ⓐ g מתוקן.

ⓑ לכל $q\in F[x]$: q מחלק את g ⟺ q מחלק את כל איברי S ①

וכמו כן, יש $s_1,\dots,s_n\in S$ ו-$f_1,\dots,f_n\in F[x]$ כך ש:

② $g=f_1\cdot s_1+\dots+f_n\cdot s_n$

<u>הערה:</u> מ-ⓑ נובע ש-g מחלק את כל איברי S (כי g מחלק את עצמו)

<u>הוכחה</u>

<u>יחידות:</u> g נקבע מקביל פולינום מתוקן ע"י מחלקיו.

<u>קיום:</u> אם $S=\{0\}$ ניקח $g=0$.

נניח $S\neq\{0\}$, ונסמן ב-Λ הביטויים מהצורה:

$$\Lambda=\{f_1\cdot s_1+\dots+f_n\cdot s_n : f_1,\dots,f_n\in F[x],\ s_1,\dots,s_n\in S,\ n\ \text{טבעי}\}$$

מאחר ש-S שונה מאפס, נובע $\Delta\neq 0$ $(S\neq\{0\})$

ניקח כ-g איבר ב-$\Delta-\{0\}$ שמעלתו מינימלית וניקח את g מתוקן.

ברור ש-ⓐ נכון (מאותה הגדרה) <u>ונותר להוכיח את ①</u>

מ-② נובע: אם q מחלק את כל איברי S ⟸ q מחלק את g.

$(q\in F[x])$

לכן נותר להוכיח: q מחלק את g ⟸ q מחלק את כל איברי S. $(q\in F[x])$

∴ מספיק לנו להוכיח ש: g מחלק את כל איברי S:

יהי $s\in S$, נחלק את s ב-g: נקבל $s=g\cdot R+t$ כאשר t השארית

כמו כן, $\deg t<\deg g$. לכן: $\Delta\ni t=s-R\cdot g=\underbrace{1\cdot s}_{\text{שייך ל-}\Delta}-R\underbrace{(f_1s_1+\dots+f_n\cdot s_n)}_{\text{שייך ל-}\Delta}\in\Delta$

אבל $\deg t<\deg g \Leftarrow t\notin\Delta-\{0\}$ לפי הגדרת g, לכן $t=0$! ו-g מחלק את s.