12.6.08

אלגברה לינארית 2

(1) 12.06.08 - שיעור

תזכורת:

$T: V \to V$ אופרטור לינארי מעל V מרחב $\dim V < \infty$ מוגדר ומקיים מעל $\mathbb{F}$

ויהי $v \in V$.

(1) הפולינום המינימלי של v מסומן $m_{T,v} = m_v$.

(2) m_v מתאפס ומקיים $q(T)v = 0 \iff q$ מתחלק ב-m_v.

בפרט $m_v(T)v = 0$, $v \in \ker m_v(T)$.

(3) m_v מחלק את m_T ולכן בפרט $m_v \neq 0$.

(4) $\deg m_v = 0 \iff m_v(x) = 1 \iff v = 0$.

$\deg m_v > 0 \iff v \neq 0$

(5) אם $\{v_1, \dots, v_m\}$ בסיס של V אז $m_T = lcm(m_{v_1}, \dots, m_{v_m})$

הוכחה יסודית

א - אם $m_{v_1}, \dots, m_{v_k}$ אם מאוזגות אז $m_{v_T} = \prod_{i=1}^{k} m_{v_k}$

ב - ואם זה $v_i \neq 0$ לכל i אז $\{v_1, \dots, v_k\}$ בת"ל.

ג - $f(T)v = \frac{m_v}{gcd(f, m_v)}$ לכן

← **מסקנה** - לכל פולינום h המקיים את m_v קיים w כך ש $m_w = h$

※ **נשים:** קיים וקטור v כך ש $m_v = m_T$

※ **הערה:** $k = \deg m_v$ מהשלמת בסיס יש לנו $v, Tv, T^2v, \dots, T^{k-1}v$ בלתי תלויים

$T^k v$ תלוי בהם ואז יש לנו בדיוק $v, Tv, \dots, T^{k-1}v$ אך T^k.

ואם נסמן $m_v(x) = x^k + c_{k-1}x^{k-1} + \dots + c_0$ אז התלות היא:

$T^k v = -(c_{k-1}T^{k-1} + \dots + c_0 I)v$

(כאשר $v \neq 0$).

הגדרה: $Z(v, T) = span\{v, Tv, \dots, T^{k-1}v\}$

כאשר אם $v = 0$ אז $Z(v, T) = \{0\}$

מה ניתן ללמוד על מחלקה זו?

(1) $Z(v, T)$ הוא T שמור - משום שאם נפעיל את T על $T^i v$ $(i < k-1)$ נקבל $T^{i+1}v$ שהוא גם וקטור בסיס והחל מ $T^k v$ מקבלים קומבינציות לינאריות הנשלטות.

רואים כן $Z(v, T)$ הוא המרחב הT-שמור הקטן ביותר והוא נקרא **המרחב (ה-T שמור) הנוצר ע"י v.**

(2) $B_v = \{v, Tv, \dots, T^{k-1}v\}$ (כאשר $k = \deg m_v$) הינה בלתי תלויה ומהווה בסיס ל $Z(v, T)$

(3) $\deg m_v = \dim(Z(v, T)) = k$ (אם הוא מחזיר את המחלקה בלי ההתלקה נקרא הדרגה ביקולר).

(4) לכל $w \in Z(v, T)$ קיים פולינום יחיד $q \in \mathbb{F}[x]$ כך ש $\deg q \leq k-1$ ולכן $w = q(T)v$ בנוסף יש איזומורפיזם בין מחלקה מודולו $k-1$ לבין מחלקה בגודל.

(5) תיאור אחר של $Z(v, T)$ הוא $Span\{T^i v\} = Z(v, T) = Span\{v, Tv, \dots\}$ $(i = 0, \dots)$

אין נתון תיאור כי $f(T)v = w$ שדווא אינה לא יחיד

אבל מתקיים $f(T)v = 0 \iff f$ מתחלק ב m_v

אז $\begin{cases} \mathbb{F}[x] \to Z(v, T) \\ f \to f(T)v \end{cases}$ מעתה ההתאמה הוא: $(\forall q \in \mathbb{F}[x])\ q \cdot m_v$ הדיאגרמה שלמה ל m_v.

מסקנה מהיות f נחלק ב m_v ונקבל $f = g \cdot m_v + q$ כאשר $\deg q \leq k-1$

ואז $f(T)v = q(T)v$ (כי $g m_v(T)v = 0$).

וכלומר זה הפולינום שקיבלנו בסעיף ו' שהוא יחיד.

הגדרה: $f(T|_{Z(v,T)})$ כאשר f פולינום

$T|_{Z(v,T)}$ הגבלה T מתוך $Z(v,T) \longrightarrow Z(v,T)$.

(1) נתון כללי אם $R: U \to U$ ו $W \subset U$ תת מרחב R-שמור.
אז נשקול $R|_W : W \to W$ (הגבלה המתאימה)
א- $Im(R|_W) = R(W)$
$rank(R|_W) = \dim Im(R|_W) = \dim R(W)$
ב- $\ker(R|_W) = \ker R \cap W$

$\ker R|_W$
$\equiv$
$Im\ R|_W$

(2) $f(T|_{Z(v,T)}) = f(T)|_{Z(v,T)}$

(3) $Im\ f(T|_{Z(v,T)}) = Im\ f(T)|_{Z(v,T)} = f(T)(Z(v,T))$

$f(T)(Z(v,T)) = f(T)(span\{v, Tv, T^2v, \dots\}) = span\{f(T)v, Tf(T)v, \dots\}$

נשים לב שזה מתאים אם להחליף $f(T)Tv \to Tf(T)v$

ולכן המתמר הינו: $Z(f(T)v, T)$

$\dim m_{f(T)v} = rank\ f(T|_{Z(v,T)}) = \dim Im\ f(T|_{Z(v,T)}) = \dim Z(f(T)v, T)$

$m_{f(T)v} = \dfrac{m_{Tv}}{gcd(f, m_v)} \Rightarrow \deg m_{f(T)v} = \deg m_v - \deg(gcd(f, m_v))$

(4) $\ker f(T)|_{Z(v,T)} = \ker(f(T|_{Z(v,T)})) = (\ker f(T)) \cap Z(v,T)$

$\dim \ker(f|_{Z(v,T)}) = \dim Z(v,T) - rank\ f(T|_{Z(v,T)}) = \deg m_v - rank\ f(T|_{Z(v,T)})$

$= \deg(gcd(f, m_v))$

פירוק $Z(v,T)$

טענה א' - אם $m_{v_1}, m_{v_2}, \dots, m_{v_k}$ זרים בזוגות אז
$$Z(v_1+\dots+v_k,T)=\bigoplus_{i=1}^{k} Z(v_i,T)$$
(ובלתי תלויים אם $m_v = m_{v_1}\cdot m_{v_2}\cdots m_{v_k}$)

טענה ב' - תהי T טרנספורמציה לינארית כאשר $\dim V<\infty$ ונניח V מרחב וקטורי מעל F. יהי $v\in V$ ויהי $m_v = q_1\cdot\dots\cdot q_k$ פרוק כאשר $q_1,q_2,\dots,q_k$ זרים בזוגות. אז קיימים $v_i\in Z(v,T)$ $i=1,2,\dots,k$ כך ש:

1. $\forall i.\ m_{v_i}=q_i$
2. $v=v_1+\dots+v_k$
3. $Z(v,T)=\bigoplus_{i=1}^{k} Z(v_i,T)$

הוכחת טענה א'

תת המרחב $Z(v_1,T)+\dots+Z(v_k,T)$ הוא תת מרחב T-שאור כי כל אחד מהם T-שאור. <u>נראה שכל תת מרחב T-שאור הוא תת מרחב T-שאור כפלי</u> והוא מכיל את $v_1+\dots+v_k$ (כי $v_i\in Z(v_i,T)$), לכן $Z(v_1+\dots+v_k)\subseteq\sum_{i=1}^{k} Z(v_i,T)$

לפי $\dim Z(v_1+\dots+v_k,T) = \deg m_{v_1+\dots+v_k} = \deg(m_{v_1}\cdot\dots\cdot m_{v_k}) = \sum_{i=1}^{k}\deg m_{v_i} =$
מכיוון שהם זרים בזוגות

$=\sum_{i=1}^{k}\dim Z(v_i,T)$

יודעים כי $\dim\bigoplus_{i=1}^{k}(Z(v_i,T)) = \dim\left(\sum_{i=1}^{n} Z(v_i,T)\right)\le\sum_{i=1}^{n}\dim Z(v_i,T)$
משהו שיש הכלה מכיוון אחד ויחס מימדים בכיוון הזה שיש שוויון בין המימדים.
שוב, ראינו שמימדו הוא סכום המימדים לכן מבחינת הסכום יש.

מסקנה - בהנחות טענה א' קיימים פולינומים f_i כך ש $v_i=(v_1+\dots+v_k)$

הוכחת טענה ב'

מהשפה הנספרת הקודמת $v\in\ker m_v(T)=\bigoplus_{i=1}^{k}\ker q_i(T)$
לכן קיימים $\forall i.\ v_i\in\ker q_i(T)$
כך ש $v=v_1+v_2+\dots+v_k$ (משפט ב')
כעת כן $q_i(T)v_i=0 \Leftarrow m_{v_i}$ מחלק את q_i לכן נשאר $\boxed{h_i\cdot m_{v_i}=q_i}$
מאחר ש $q_1,\dots,q_k$ זרים בזוגות נגלה שגם $m_{v_1},\dots,m_{v_k}$ זרים בזוגות
לכן בדרגה ב' נגלה מטענה א' ומהרישה ב'.

מאחר ש $m_{v_1},\dots,m_{v_k}$ זרים בזוגות אז $m_v=m_{v_1}\cdot m_{v_2}\cdots m_{v_k}$
כי v הוא הסכום שלהם. לפי הנתון $m_v=q_1\cdot\dots\cdot q_k$

לפי הסימון שהגדרנו לעיל q_i: $m_v=m_{v_1}h_1\cdot m_{v_2}h_2\cdot\dots\cdot m_{v_k}q_k$
לכן $h_1,h_2,\dots,h_k=1$ (כי הם מתחלקים ב q_i מתוקנים, הם מתוקנים! m_v מתוקן לכן מודרת h_i מתוקנים).
לכן $q_i=m_{v_i}\cdot h_i=m_{v_i}$ משל.

נספח ב' - התמרות מצמדות (דוגמאות)

הגדרה: תהי $T:V\to V$ טרנספורמציה לינארית כאשר V מרחב וקטורי מעל שדה סופי $\mathbb{F}$. T תקרא **מצמדת** אם קיים וקטור $v\in V$ כך ש $Z(v,T)=V$ (כל וקטור לא תלוי בו ניתן לקבל ע"י הפעלה כלשהי **בודדת** של T).
המטריצה $A\in M_n(\mathbb{F})$ נקראת **מצמדת** אם ההתמרה הנלווית לה יפה ב $\mathbb{F}^n$ הינו מצמדת והוקטור הנלווה לה הוא הוקטור הראשון בבסיס הוא יחיד.

תכונות בסיס

1) A מצמדת אמ"מ ההתמרה הנלווית לה יפה מצמדת (מהגדרה)
2) נניח T_1,T_2 התמרות שקולות:

$$\begin{tikzcd} V_1 \arrow[r, "T_1"] \arrow[d, "\varphi^{-1}"'] & V_1 \\ V_2 \arrow[r, "T_2"] & V_2 \arrow[u, "\varphi"'] \end{tikzcd}$$

(φ איזומורפיזם)
V_1 כמרחב וקטורי ל V_1 אי"ש.
V_2 (V_1,V_2 מרחבים וקטוריים)

אז T_1 מצמדת אמ"מ T_2 מצמדת
V יפה אי"ש T_1 אמ"מ $\varphi(v_1)=v_2$ יפה אי"ש T_2 (וקטור יפה יפה).
כך שאותכונה של ההתמרה לא משתנה בהעברה בין מחלקות שקולות.

3) $T:V\to V$ מצמדת אמ"מ $[T]_B$ מצמדת לכל בסיס B

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\varphi=[\cdot]_B"'] & V \\ \mathbb{F}^n \arrow[r, "{[T]_B}"'] & \mathbb{F}^n \arrow[u, "\varphi^{-1}=[\cdot]_B"'] \end{tikzcd}$$

לכן נובעת משלילה של 2 ושל 1 כי יש איזומורפיזם בין T ל $[T]_B$ (דרך φ) וכן מהגדרה.

4) אם A_1 ו A_2 דומות אז A_1 מצמדת אמ"מ A_2 מצמדת.
(כי אז $A_2=[A_1]_B$ ההתמרה של)

מטריצת לוויה

הגדרה: יהי $h(x)=x^k+a_{k-1}x^{k-1}+\dots+a_0$ פולינום מתוקן $(k\geq 1)$

$$M_k(\mathbb{F})\ni C(h)=C_h=\begin{pmatrix} 0 & 0 & & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & 0 & -a_{k-2} \\ 0 & 0 & & 1 & -a_{k-1} \end{pmatrix}$$

למשל לאמר $f=x^3+11x^2+9x+2$ אז $C_f=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -9 \\ 0 & 1 & -11 \end{pmatrix}$

ואם $h(x)=x+a_0$ אז $C_h=(-a_0)$.

וכן מטריצה מלווה לפולינום h.

טענה: $C_h\in M_k(\mathbb{F})$ הינו מטריצה מצמדת אם וקטור יפה $v=e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$
ומתקיים $P_{C_h}=m_{C(h)}=h=m_v$

הוכחה: מהיות $v=e_1$ וקטור יפה $C(h)v=e_2$! $C(h)^{k-1}v=e_k$ ... מצד שני
$C(h)^k v=C(h)e_k=-\begin{pmatrix}a_0\\\vdots\\a_{k-1}\end{pmatrix}=$

$=-(a_{k-1}C(h)^{k-1}v+\dots+a_1C(h)v+a_0v)$

לכן $h=m_v(x)=x^k+a_{k-1}x^{k-1}+\dots+a_0$
כמו כן מתקיים: $m_v(C(h))e_j=m_v(C(h))(C(h))^{j-1}v=C(h)^{j-1}\underbrace{m_v(C(h))v}_{=0}$
מהגדרת m_v

לכן $m_v(C(h)) = 0$ ולכן $m_{C(h)}$ מחלק את $m_v = k$.
מצד שני $m_v = h$ מחלק את $m_{C(h)}$ (מתכונה כללית של הסתלקות - פולינום מינימלי של מטריצה מחלק את הפולינום המינימלי של ההסתלקות).
ומאחר ש $m_{C(h)}$ ו m_v מתוקנים אז הם שווים.

נחשב $p_{C(h)}$:

$$p_{C(h)}(X) = \det \begin{pmatrix} X & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ -1 & X & & \vdots & a_1 \\ 0 & -1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & X \quad a_{k-1} \end{pmatrix} =$$

$$= \det \left[\begin{pmatrix} 1 & X & X^2 & \cdots & X^{k-1} \\ 0 & 1 & X & \cdots & X^{k-2} \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & X \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ -1 & X & & \vdots & a_1 \\ & -1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & \ddots & 0 & a_{k-2} \\ 0 & & & -1 \quad X & X + a_{k-1} \end{pmatrix} \right] =$$

אם נשים פרוש לפי שורה ראשונה אז...

$$= \det \begin{pmatrix} 0 & & & 0 & h(X) \\ -1 & 0 & & & * \\ 0 & -1 & 0 & & * \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots\ 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & & -1 & * \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & & 0 & h(X) \\ -1 & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & -1 & 0 & & \vdots \\ & & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & 0 & 0 \\ & & & -1 & 0 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} h(X) & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} = h(X)$$

הערה - הטלן האחרון מראה שניתן לכתוב מ $(XI - C_h)^{-1}$ ע"י $\begin{pmatrix} h(X) & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & \ddots \end{pmatrix}$

הכללה - מימין או משמאל במטריצה אלמנטרית ב $M_k(\mathbb{F}[X])$ אלו מטריצות מהצורה

$A = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & f(x) \\ & 1 & 0 \end{pmatrix}$ כאשר $A^{-1} \begin{pmatrix} 1 & & 0 & 0 \\ & \ddots & & -f(x) \\ 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(אי ש $f(x)$ חוצה האולרסין)

או מטריצה מהצורה הבאה: $\begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \lambda & \\ 0 & & & & 1 \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$ כאשר λ פולינום קבוע.

וגם שורות מעל וחוצה $M_k(\mathbb{F}[X])$ מטריצה מעל חוג הפולינומים.