תזכורת:

סיכום תורת צורת ז'ורדן

יהי $T: V \to V$ כאשר $\dim V < \infty$ טרנספורמציה לינארית מעל שדה $\mathbb{F}$.
נניח m_T מתפרק מעל $\mathbb{F}$ (זה שקול לכך ש-P_T מתפרק מעל $\mathbb{F}$).
נפרק את m_T לגורמים $m_T(x) = (x-\lambda_1)^{n_1} \cdots (x-\lambda_k)^{n_k}$ כאשר $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ שונים זה מזה.
אזי $V = \bigoplus_{i=1}^{k} \ker(T-\lambda_i I)^{n_i}$ [$\ker(x-\lambda_i)(T) = \ker(T-\lambda_i I)$] ממשפט הפירוק.

ראינו כיצד לבנות בסיס של $\ker(T-\lambda_i I)^{n_i}$ המורכב משרשראות ז'ורדן ואם נצרף בסיסים אלו יחד (הסכום ישר כי זה מצב) נקבל בסיס B ל-V המורכב משרשראות ז'ורדן ואם נסדר בסדר מתאים נקבל $[T]_B = J$ מטריצת ז'ורדן.

הערות

(1) אם מטריצה A מתייחסים להעתקה של A ואם m_A מתפרק אז נמצא בסיס של $\mathbb{F}^n$ המורכב משרשראות ז'ורדן. מכאן קיימת $S \in M_n(\mathbb{F})$ כך שעמודותיה הם וקטורי הבסיס בסדר מתאים ואז $A = SJS^{-1}$ כאשר J מטריצת ז'ורדן.

(2) J נקראת צורת ז'ורדן של T או A והיא יחידה עד כדי סדר הבלוקים.

(3) נזכיר ש-$\lambda_1, \dots, \lambda_k$ הם הערכים העצמיים של ההעתקה T. (או של מטריצה A).

(4) המשמעות של n_i - n_i הוא גודל הבלוק המקסימלי שמתאים לערך העצמי λ_i שכן הפולינום המינימלי של T = הפולינום המינימלי של T לפי בסיס B שהוא שווה לפולינום המינימלי של J והוא שווה הכפולה המשותפת של הבלוקים.
$$m_T(x) = m_{[T]_B}(x) = m_J(x) = lcm(\text{הפולינומים המינימליים של הבלוקים})$$
$$m_{J_m(\lambda_i)}(x) = (x-\lambda_i)^{n_i}$$

(5) לפעמים n_i אינם ידועים מראש כי m_T לא ידוע מראש. הפתרון לכך הוא אחד מהשניים:
א- אם אפשר למצוא את J ישירות אז ניתן לקרוא את n_i מתוך J.
ב- אחרת, מספיק למצוא מספר $n_i \geq l$ ולהשתמש בו בהרצת האלגוריתם על $(T-\lambda_i I)^l$ משום ש-$\ker(T-\lambda_i I)^l = \ker(T-\lambda_i I)^{n_i}$ כי המרחבים מוכלים זה בזה ומימדיהם שווים כי השרש המינימלי הוא של השרשראות קצרה מ-n_i לכן מספיק $\ker(T-\lambda_i I)^i \subseteq \ker(T-\lambda_i I)^j$ $(i<j)$ לקחת מספר גדול מדי.

6. מטריצות צמודות ומספרים מרוכבים

(א) לכל מטריצה $A = (a_{ij})$ מרוכבת נסמן $\bar{A} = (\bar{a}_{ij})$ ואז מתקיים
$$\overline{A \pm B} = \bar{A} \pm \bar{B}$$
$$\overline{\lambda A} = \bar{\lambda} \cdot \bar{A}$$
$$\overline{AB} = \bar{A} \cdot \bar{B}$$
תזכורת וקטור צמוד: אם $v = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$ אז $\bar{v} = \begin{pmatrix} \bar{z}_1 \\ \bar{z}_2 \\ \vdots \\ \bar{z}_n \end{pmatrix}$ וכמו כן
מתקיים $\overline{Az} = \bar{A} \cdot \bar{v}$.

(ב) כלל: נניח $A \in M_n(\mathbb{R})$ אז $P_A \in \mathbb{R}[X]$. לכן אם λ ע"ע של A אזי $\bar{\lambda}$ ע"ע של A כי הם שורשי הפולינום האופייני. והריבויים האלגבריים שווים גם כן.
נניח ש-v וקטור עצמי של A המתאים ל-λ אז $\bar{v} \in \mathbb{C}^n$ (צמוד) וקטור מרוכב אז $Av = \lambda v$ לכן $A\bar{v} = \bar{A} \cdot \bar{v} = \overline{Av} = \overline{\lambda \cdot v}$ (כי A ממשית).
כלומר $A\bar{v} = \bar{\lambda}\bar{v}$ ולכן זה שקול ל-$Av = \lambda v$. מסקנה - v וקטור עצמי מתאים ל-λ אם"ם $\bar{v}$ וקטור עצמי מתאים ל-$\bar{\lambda}$.

באופן דומה: $v_1, \dots, v_k$ שרשרת ז'ורדן של A המתאימה ל-λ אם"ם $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k$ שרשרת ז'ורדן של A מתאימה ל-$\bar{\lambda}$.

פתרון מתמטי

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 & -2 \\ -3 & 0 & -4 & -4 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

בשלב ראשון נמצא פולינום אופייני - $P_A(x) = x^4 - x^3$

(אחרי חישוב $\det(xI - A)$)

$(x^4 - x^3 = x^3(x-1))$

לכן הערכים העצמיים יהיו $\lambda_1 = 1$ עם ריבוי 1, $\lambda_0 = 0$ עם ריבוי 3

$\lambda = 1$

כעת נמצא את הוקטורים העצמיים: $(I - A) = (\lambda_1 I - A) = 0 \quad V \neq 0$

$$Span\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$$

$\lambda = 0$

$ker(-A) = ker(A) =$ דירוג...פספוס...דירוג $= ker\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$(\dim ker = \dim tot - \dim Im)$

מסקנה: $g_2 = \dim[ker(-A)] = 2$

כלומר יש 2 בלוקים שמתאימים ל-0.

כעת ננסה לחשב את J:

$$J = \begin{pmatrix} \begin{matrix} 0 & 1 \\ & 0 \end{matrix} & 0 \\ 0 & \begin{matrix} 0 & \\ & 1 \end{matrix} \end{pmatrix}$$

(אנו יודעים שיש בלוק אחד של אפס שגודלו 2 ואחר שגודלו 1 מתאים ל λ_1 (כי $1 = \dim \lambda_1$) ומטריצה כולה בגודל 4)

גודל מקסימלי של בלוק מתאים ל λ_2 הוא 2×2 (כי $2 = \dim$).

נחשב $ker(\lambda I - A)^2$:

$ker(\lambda I - A)^2 = ker(-A)^2 = ker(A^2) = ker(1 \ 0 \ 2 \ 2) =$

$\dim ker(\lambda_0 I - A)^2 = 3$

$\dim ker(\lambda_0 I - A) = 2$

כעת נמצא של $ker(\lambda_0 I - A)^2$ מאחד ל $ker(\lambda_0 I - A)$ ואז נשלים אותו: נשים לב שהשורות הראשונה ולא משנה. ניקח את הוקטור

$$V_{2,1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

שנמצא ב- $ker(\lambda_0 I - A)$ ולא ב $ker(\lambda_0 I - A)^2$.

נמצא את השרשרת שנוצרת ע"י $V_{2,1}$:

$$\underbrace{V_{2,1}, V_{1,1}}_{\text{שרשרת ע"י מתאימה לבלוק } 2\times 2} = (A - \lambda_0 I)V_{2,1} = AV_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

כדי להשלים בסיס של $ker(\lambda_0 I - A)^2$ המורכב משרשראות ז'ורדן יש להשלים את $V_{1,1} \in ker(\lambda I - A)$ לבסיס של $ker(A - \lambda_0 I)$ מתוך $\{0\} = ker(\lambda_0 I - A)^0$. נניח:

$$V_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

סיכום - עבור J הנ"ל יש לקחת את

$$S = \begin{pmatrix} | & | & | & | \\ v_{1,1} & v_{2,1} & v_{1,2} & v \\ | & | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

אז S הפיכה $AS = SJ$ אזי $A = SJS^{-1}$

כאשר:

$v \in \ker(\lambda_1 I - A)$

$v_{11}, v_{21} \in \ker(\lambda_0 I - A)^2$

$v_{1,2} \in \ker(\lambda_0 I - A)$

פרק ד: פולינום מינימלי של וקטור ותת מרחב T-שמור הנוצר ע"י וקטור

(1) **פולינום מינימלי של וקטור ביחס לטרנספורמציה לינארית**

משפט - תהי $T: V \to V$ טרנספורמציה לינארית כאשר $\dim V < \infty$, V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$.
יהי $v \in V$. אז קיים פולינום אחד ויחיד מתוקן $m_v = m_{v,T} \in \mathbb{F}[x]$ כך ש $q(T)v = 0$
אם"ם q מתחלק ב m_v $(\forall q \in \mathbb{F}[x])$.

הוכחה - נגדיר אידיאל $I_v = \{q \in \mathbb{F}[x] \mid q(T)v = 0\}$
נסמן היוצר המתוקן $m_v = \gcd(I_v)$ אז $q(T)v = 0 \Leftrightarrow q \in I_v \Leftrightarrow$ q מתחלק ב m_v
אם m_v' פולינום נוסף עם תכונה זו אז m_v ! שני מתחלקים אחד את השני
ומתוקנים ולכן הם שווים. m_v מתחלק ב m_v' $\Leftarrow m_v(T)v=0 \Leftarrow m_v$ מתחלק ב m_v'
שמתחלקים אחד בשני ושניהם מתוקנים הם שווים.

שימו לב: מספר $m_v(T)v = 0$ והוא היוצר של האידיאל שציינו.

תכונות של m_v

① m_v מחלק את m_T (כי $m_T(T)v = 0(v) = 0$) ומספר $m_v \neq 0$ כלומר $\deg m_v \geq 0$.

② מתי $\deg(m_v) = 0$? תשובה: $m_v(x) = 1$ אם"ם $v = 0$ (כי אז
$I_v(v) = 0 \Leftarrow (T)(v) = I_v(v) \Leftarrow m_v(T)(v) = (T)(v) \Leftarrow 0 = m_v(T)(v)$

מסקנות: $\deg(m_v) = 0 \Leftrightarrow m_v(x) = 1 \Leftrightarrow v = 0$
$\deg(m_v) > 0 \Leftrightarrow v \neq 0$ (או $\deg(m_v) \geq 1$)

③ אם $\omega = v_1, \ldots, v_k$ מערכת פורשת של וקטורים שפורשים את V. אז
$m_T = \operatorname{lcm}\{m_{v_1}, \ldots, m_{v_k}\}$

הוכחה: לכל פולינום $q \in \mathbb{F}[x]$ מתקיים: q מתחלק ב m_T אם"ם $q(T)=0$
אם"ם $\forall i.\ q(T)v_i = 0$ (כי כל העתקה מתאפסת (0)) $\Leftrightarrow$ q מתחלק ב m_{v_i}
לכל i $\Leftrightarrow$ q מתחלק ב $\operatorname{lcm}\{m_{v_1}, \ldots, m_{v_k}\}$ כיון הם מתחלקים זה בזה
וגם מתוקנים ולכן שווים.

④ $v \in \ker m_v(T)$ (כי מספר מתקיים $m_v(T)v = 0$).

תכונה יסודית 1

יהיו $v_1, \ldots, v_k \in V \setminus \{0\}$ כך ש $m_{v_1}, \ldots, m_{v_k}$ זרים בזוגות. אז:
א- $v_1, \ldots, v_k$ בלתי תלויים
ב- $m_{\sum_{i=1}^{k} v_i} = \prod_{i=1}^{k} m_{v_i}$ (לשים לב זה לא תלוי בתנאי ש $v_i \neq 0$ כי
לפעמים לא תמיד ; $m_0 = 1$).

הוכחה - נסמן $v = v_1 + v_2 + \ldots + v_k$ וגם $f = m_{v_1} \cdot \ldots \cdot m_{v_k}$
(v וקטור הסכום, f פולינום המכפלה).
נשתמש במשפט הפירוק הפרימרי: ① $\ker f(T) = \bigoplus_{i=1}^{k} \ker m_{v_i}(T)$

מאחר ש $\forall i,\ \ker m_{v_i}(T) \ni v_i \neq 0$ אז v_i בלתי תלויים.
כמו כן נקבל את השוויון ② $v = v_1 + \ldots + v_k$ הוא הפירוק של v במובן משפט
הפירוק $V = \bigoplus_{i=1}^{k} m_{v_i}(T)$ מאחר שכל אחד מהם T-שמור של $\ker f_T$ (כלומר
מרחב T-שמור).
עבור כל פולינום $q \in \mathbb{F}[x]$ מתקיים השוויון הבא:

③ $q(T)v = \sum_{i=1}^{k} q(T)v_i$

וזהו הפירוק של $q(T)v$ ביחס ל ①. מכאן $q(T)v = 0$ אם"ם $\forall i.\ q(T)v_i = 0$
אם"ם q מתחלק ב m_{v_i} לכל i אם"ם q מתחלק ב f המכפלה משום שהם

בקורס מוכח כי הם זרים בזוגות q מחלק את $\mathrm{lcm}(m_{v_1},\dots,m_{v_k})$ וזה סתירה.
ול q מתחלק ב m_v $(=f)$ ומכאן נקבל ב'.

<u>תכונה נוספת 2</u>

לכל $v\in V$; $g\in \mathbb{F}[X]$

$$m_{g(T)v}=\frac{m_v}{\gcd(m_v,g)}$$

(המנה מתחלקת את המנה שכן מתחלוקה יתרת שלמים.)

<u>הוכחה</u>- נסמן $h=\gcd(m_v,g)$ אז מתקיימים השוויונות הבאים.

$g=h\cdot f_2$
$m_v=h\cdot f_1$
f_1,f_2 זרים (אחרת המחלק המשותף הוא לא h).
(תמיד אפשר לרשום כך פולינומים של $\gcd=h$).

נשים לב ש $\frac{m_v}{\gcd(m_v,g)}=\frac{m_v}{h}=f_1$

לכל פולינום $q\in\mathbb{F}[X]$ - q מתחלק ב $m_{g(T)v}$ אם"ם $q\cdot g(T)v=0=q(T)g(T)v$
אם"ם $(q\cdot g)$ מתחלק ב m_v אם"ם $q\cdot h\cdot f_2$ מתחלק ב $h\cdot f_1$ (נצמצם כי $h\neq 0$)
אז $q\cdot f_2$ מתחלק ב f_1 ואבל f_1,f_2 זרים אז q חייב להתחלק ב f_1
לכן $f_1=m_{g(T)v}$.

מסקנה- אם f מחלק את m_v אז קיים וקטור מהצורה $w=g(T)v$ כך ש $m_w=f$
<u>הוכחה</u>: ניקח $g=\frac{m_v}{f}$ אז $m_v=g\cdot f$ ו $\gcd(m_v,g)=g$ לכן

$$m_{g(T)v}=\frac{m_v}{\gcd(m_v,g)}=f$$

<u>משפט</u>: יהי $T:V\to V$ טרנספורמציה לינארית כאשר $n=\dim V<\infty$ אזי קיים $v\in V$
כך ש $m_T=m_v\ (=m_{v,T})$
<u>הוכחה</u>- נסמן את הפירוק $m_T=p_1^{n_1}\cdot p_2^{n_2}\cdots p_k^{n_k}$ הפירוק הקנוני לגורמים אי פריקים.
יהי $v_1,\dots,v_n$ בסיס של V אזי $m_T=\mathrm{lcm}(m_{v_1},\dots,m_{v_n})$ לכן קיים
וקטור $w_i\in\{v_1,\dots,v_n\}$ כך ש $m_{w_i}=p_1^{l_1}\cdots p_i^{n_i}\cdots p_k^{l_k}$ (כלומר בחזקה של
n_i, אחרת הרי שהחזקה של p_i חייבת להיות מחזקה n_i).
מהמסקנה נוכל לקבל וקטור $u_i\in V$ כך ש $m_{u_i}=p_i^{n_i}$.
מאחר ש $m_{u_1}=p_1^{n_1},\dots,m_{u_k}=p_k^{n_k}$ זרים זה לזה נוכל שוב ניקח $u=\sum_{i=1}^{k}u_i$
אז $p_1^{n_1}\cdot p_2^{n_2}\cdots p_k^{n_k}=m_T=m_u=m_{u_1}\cdot m_{u_2}\cdots m_{u_k}$

<u>טענה</u>- יהי $0\neq v\in V$ ונסמן:
$$m_v(x)=x^k+c_{k-1}x^{k-1}+\dots+c_1x+c_0$$
אז ① $k=\deg m_v$ המקסימלי מאפשר יחיד ש $v,Tv,T^2v,\dots,T^{k-1}v$ בלתי תלויים
ו T^kv ~~לא~~ תלוי בהם.

ומתקיים ② $T^kv=-(c_{k-1}T^{k-1}v+\dots+c_1Tv+c_0v)$

<u>הוכחה</u>- ② נובע ישירות מ① ומ $m_v(T)v=0$
כדי להראות ש $v,T^{k-1}v,\dots,Tv$ בת"ל נניח $0=\alpha_{k-1}T^{k-1}v+\dots+\alpha_1Tv+\alpha_0$
ונסמן: $q(x)=\alpha_{k-1}x^{k-1}+\dots+\alpha_1x+\alpha_0$ אז $q(T)v=0$ כלומר q מתחלק
ב m_v אבל $\deg q<k=\deg m_v$ לכן $q=0\Rightarrow\forall i.\ \alpha_i=0$

($\deg q=k-1$ מהפולינום שלנו)