TEL AVIV UNIVERSITY אוניברסיטת תל-אביב
RAYMOND AND BEVERLY SACKLER FACULTY OF EXACT SCIENCES הפקולטה למדעים מדויקים ע"ש ריימונד ובברלי סאקלר
SCHOOL OF MATHEMATICAL SCIENCES בית הספר למדעי המתמטיקה

מבחן באלגברה ליניארית 2

0366.1112.01

ב' בניסן, תשנ"ט
19 במרץ 1999

לתלמידי דן הרן
מועד א'

משך המבחן: 3 שעות.
אין להשתמש בכל חומר עזר.
ענה על ארבע מתוך חמש השאלות הבאות. (רק ארבע התשובות הראשונות תבדקנה!)

שאלה 1: יהי V מרחב וקטורי ממימד סופי מעל שדה F ותהי $T: V \to V$ העתקה ליניארית. יהיו $v_1 \dots v_r, w_1 \dots w_s \in V$ שונים מאפס כך ש-

$$Z(v_1,T) \oplus \cdots \oplus Z(v_r,T) = V = Z(w_1,T) \oplus \cdots \ni Z(w_s,T)$$

כמו כן, לכל $1 \le i \le r$ יהי $m_i \in F[X]$ מאפס-T של v_i ולכל $1 \le j \le s$ יהי $m'_j \in F[X]$ מאפס-T של w_j. נניח כי $m_r|\cdots|m_2|m_1$ וכן $m'_s|\cdots|m'_2|m'_1$. הוכח כי $r = s$ וכן $m_i = m'_i$ לכל $1 \le i \le r$. *נסח (בלי הוכחה) כל טענה עליה הינך מסתמך בהוכחה.*

שאלה 2: יהי V מרחב מכפלה פנימית ממימד סופי מעל $\mathbb{C}$ ותהי $T: V \to V$ העתקה ליניארית נורמלית. הוכח שוקטורים עצמיים של T השייכים לערכים עצמיים שונים - ניצבים זה לזה. *עליך להוכיח כל משפט / למה / טענה שהוכחו בהרצאה, אם ברצונך להסתמך עליהם.*

שאלה 3: תהיינה $A, B \in M_2(\mathbb{R})$. הוכח שיש מטריצה $C \in M_2(\mathbb{R})$ שאינה מהצורה $f(A) + g(B)$ עבור שום זוג של פולינומים $f, g \in \mathbb{R}[X]$.

שאלה 4: תהי $A \in M_n(\mathbb{R})$ סימטרית הפיכה.

(א) הוכח שקיימת $B \in M_n(\mathbb{R})$ כך ש-$B^3 = A$.

(ב) הוכח: קיימת $B \in M_n(\mathbb{R})$ כך ש-$B^2 = A$ אם ורק אם קיימת $C \in M_n(\mathbb{R})$ כך ש-$C^tC = A$.

שאלה 5: תהי

$$A = \begin{pmatrix} -11 & 0 & -9 \\ 32 & 1 & 24 \\ 16 & 0 & 13 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

מצא את צורת ז'ורדן שלה J ומצא $P \in M_3(\mathbb{R})$ הפיכה כך ש-$P^{-1}AP = J$.

בהצלחה!

F-38

תרגול 1

טענה 1: יהי $v \in V$ אזי $Z(v,T)$ הינו תת מרחב אינווריאנטי של T ב-V.

טענה 2: יהי m_v מאפס T של v. יהי S הצמצום של T על $Z(v,T)$. אזי m_v ~~[illegible]~~ הוא הפולינום המינימלי של S.

טענה 3: יהי $f \in F[x]$. יהי m_v מאפס T של v. יהי m_v' מאפס T של $f(T)(v)$.

אזי:

1) $$f(T)(Z(v,T)) = Z(f(T)(v),T)$$

2) $$m_v' = \frac{m_v}{\gcd(m_v, m_v')}$$

טענה 4: יהיו $W_1, W_2, \dots W_k$ תתי מרחבים אינווריאנטים של T ב-V. יהי $f \in F[x]$.

~~אם~~ כמו כן $V = W_1 \oplus W_2 \oplus \dots \oplus W_k$

~~$f(T)(V) = f(T)(W_1) \oplus f(T)(W_2) + \dots \oplus f(T)(W_k)$~~

אזי:

$$f(T)(V) = f(T)(W_1) \oplus f(T)(W_2) \oplus \dots \oplus f(T)(W_k)$$

טענה 5: ~~$\deg(m_v) = \dim(Z(v,T))$ אזי $v \in V$~~

יהי $v \in V$. m_v מאפס T של v.

אזי: $$\deg(m_v) = \dim(Z(v,T))$$

טענה 6: יהיו W_1, W_2, W_k תתי מרחבים של V כך שמתקיים:

$$V = W_1 \oplus W_2 \oplus \dots \oplus W_k$$

אזי:

$$\dim(V) = \sum_{i=1}^{k} \dim(W_i)$$

~~**טענה 7:** יהי W תת מרחב אינווריאנטי של T ב-V~~

~~יהי S הצמצום של T על W~~

טענה 7: יהי W תת מרחב אינווריאנטי T של V.

יהי S הצמצום של T על W.

יהיו m_T, m_S הפולינומים המינימליים של T, S בהתאמה.

אזי $m_S | m_T$

טענה 8: יהיו $m_1, m_2 \in F[x]$ פולינומים מתוקנים ונניח

ש $m_1 | m_2$, $m_2 | m_1$. אזי $m_1 = m_2$

וכו'

<u>הוכחה</u>

יהי m_T הפולינום המינימלי של T

מטענה 1 לכל $z(v_i,T)$ הוא תת מרחב אינווריאנטי T ולכן

מטענה 2, $m_1 | m_T$.

כמו כן מטענה 4:

$$(1) \quad m_1(T)(V) = \bigoplus_{i=1}^{r} m_1(T)(z(v_i,T)) = \bigoplus_{i=1}^{k} z(m_1(T)(v_i),T)$$

כיוון ש $m_i | m_1$ לכל $1 \le i \le k$, הרי שמטענה 3, [illegible]

T של $z(m_1(T)(v_i),T)$ שווה ל:

$$\frac{m_i}{\gcd(m_1,m_i)} = \frac{m_i}{m_i} = 1$$

ועל כן מטענה 5, נקבל כי לכל $1 \le i \le k$ מתקיים:

$\cancel{\dim(m_1(T)(v_i))},$

$\dim(\cancel{\ker}\ z(m_1(T)(v_i),T)) = \deg(1) = 0.$

ולכן

$\cancel{\ker}\ z(m_1(T)(v_i),T) = \{0\}$

מטענה 6 ~~נקבל כיוון~~ ומ-(1) נקבל כי

$\dim(m_1(T)(V)) = \sum_{i=1}^{r} 0 = 0$

לכן

$m_1(T)(V) = \{0\}$

ובהגדרת הפולינום המינימלי נקבל כי

$m_T | m_1$

קיבלנו אם כן כי $m_1 | m_T$, $m_T | m_1$, כיוון ששני פולינומים

אלו מתוקנים, נקבל מטענה 7

$m_1 = m_T$ ✓

~~כיוון [illegible]~~

השיקולים האחרונים חלים כ"ש בעבור זה עבור m_1' של

ו- $z(w_1,T) \ldots z(w_s,T)$ ועל כן גם $m_1' = m_T = m_1$. ✓

~~עכשיו נוכיח~~

נניח בה"כ כי $s \le r$

נוכיח באינדוקציה כי $m_i = m_i'$ עבור $1 \le i \le r$,

בשלב הקודם הוכחנו כי $m_1 = m_1'$

נניח כי $m_i = m_i'$ עבור כל $1 \le i \le k$

מתקיים

~~$m_{k+1}(T)(V) = \bigoplus_{i=1}^{r} m_{k+1}$~~

$$(2) \quad m_{k+1}(T)(V) = \bigoplus_{i=1}^{r} m_{k+1}(T)\, Z(v_i, T) = \bigoplus_{i=1}^{r} Z(m_{k+1}(T)(v_i), T)$$

עבור $i \ge k+1$ מתקיים $m_i | m_{k+1}$, ולכן

עם שימוש בטענה הקודמת:

$$\dim\left(Z(m_{k+1}(T)(v_i), T)\right) = 0$$

עבור $1 \le i \le k$ מתקיים $m_{k+1} | m_i$ ולכן מטענה

2 ו- 3 מתקיים:

$$\dim\left(Z(m_{k+1}(T)(v_i), T)\right) = \deg\left(\frac{m_i}{m_{k+1}}\right)$$

נסמן עבור $i \le k$:

$$D_i = \deg\left(\frac{m_i}{m_{k+1}}\right)$$

נקבל מ-(2) ומטענה 6

$$(3) \quad \dim\left(m_{k+1}(T)(V)\right) = \sum_{i=1}^{k} D_i$$

~~נקבל~~

כמו כן מתקיים:

$$m_{k+1}(T)(V) = \bigoplus_{i=1}^{s} m_{k+1}(T)(Z(w_i, T)) = \bigoplus_{i=1}^{s} Z(m_{k+1}(T)(w_i), T)$$

אוניברסיטת תל-אביב
אוניברסיטת תל-אביב

ולכן ש

$$\dim(m_{k+1}(T)(V)) = \sum_{i=1}^{s} \deg\left(\frac{m_i'}{\gcd(m_i', m_{k+1})}\right)$$

כיוון שעבור $1\le i\le k$, לפי הנחת האינדוקציה, $m_i' = m_i$

קיבלנו כי

$$\dim(m_{k+1}(T)(V)) = \sum_{i=1}^{k} D_i + \sum_{i=k+1}^{s} \deg\left(\frac{m_i'}{\gcd(m_i', m_{k+1})}\right)$$

נקבל ש: ממה שקיבלנו ב-(3)

$$\sum_{i=1}^{k} D_i = \sum_{i=k+1}^{s} \deg\left(\frac{m_i'}{\gcd(m_i', m_{k+1})}\right) + \sum_{i=1}^{k} D_i$$

לכן:

$$\sum_{i=k+1}^{s} \deg\left(\frac{m_i'}{\gcd(m_i', m_{k+1})}\right) = 0$$

לכן:

$$\frac{m_{k+1}'}{\gcd(m_{k+1}', m_{k+1})} = 1$$

כלומר

$$m_{k+1}' \mid m_{k+1}$$

מאותם שיקולים, ניתן להראות כי

$$m_{k+1} \mid m_{k+1}'$$

ולכן מערכי ש

$$m_{k+1} = m_{k+1}'$$

הוכחנו כי $m_i = m_i'$ עבור כל $1\le i\le r$ וכו'

לכן: כמו כן, מתנאי s ו-r

$$\dim(V)=\sum_{i=1}^{r}\deg(m_i) = \sum_{i=1}^{s}\deg(m_i')$$

נניח בשלילה כי $s>r$.

כיוון ש $m_i=m_i'$ עבור כל $1\le i\le r$ נקבל כי:

$$\sum_{i=1}^{r}\deg(m_i)=\sum_{i=1}^{r}\deg(m_i)+\sum_{i=r+1}^{s}\deg(m_i')$$

מכאן

~~deg~~

$$\sum_{i=r+1}^{s}\deg(m_i')=0$$

לכן $\deg(m_i')=0$ עבור כל $s\ge i\ge r+1$

מכאן $\omega_i=0$ עבור כל $s\ge i\ge r+1$ בסתירה

לנתונים

תשובה 4

אורתוגונלית

א) כיוון ש-A סימטרית, הרי שקיימת מטריצה ~~אורתוגונלית~~ P, ~~כך ש~~ המלכסנת את A, כלומר:

$$\cancel{P^{-1}A}$$

$$P^{-1}AP = D$$

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

~~כאשר $\lambda_i \in \mathbb{R}$~~

כאשר $\lambda_i \in \mathbb{R}$ $1 \le i \le n$

כיוון שלכל a יש שורש עבור a $\lambda \in \mathbb{R}$ ממשי

נגדיר את המטריצה C:

$$C = \begin{pmatrix} \sqrt[3]{\lambda_1} & & & 0 \\ & \sqrt[3]{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \sqrt[3]{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

מטריצה

$$C^3 = D$$

לכן:

$$P^{-1}AP = C^3$$

~~נכפיל משמאל ומימין~~

מכאן:

$$A = P(P^{-1}AP)P^{-1} = PC^3P^{-1} = (PCP^{-1})(PCP^{-1})(PCP^{-1}) =$$
$$= (PCP^{-1})^3$$

לכן יש נגדיר $B = (PCP^{-1})$ ונקבל

$$A = B^3$$

מ.ש.ל.

ב) נניח ~~$A=\dots$~~ $A=C^tC$

צ/ל:

~~$A=C^tIC$~~

$$A=C^tC=C^tI_nC$$

כלומר A חופפת ל- I_n

~~כמו כן P אורתוגונלית~~

כמו כן, בהינתן הסעיף הקודם:

~~$A=P^{-1}DP$~~ ~~$A=PDP^{-1}$~~

$$A=PDP^{-1}$$

כיוון ש- P אורתוגונלית, הרי ש $P^{-1}=P^t$ כלומר

$$A=PDP^t=(P^t)^tDP^t$$

ולכן A חופפת ל- D.

~~מאחר סילבסטר נקבל כי מספר האיברים החיוביים~~

כיוון שיחס החפיפה הוא יחס שקילות, נקבל כי I_n חופף ל- D, ולכן מאחר סילבסטר, מספר האיברים ~~החיוביים ב-~~ λ הגדולים מ-0 בין λ_1,λ_2

~~...~~

שווה למספר האיברים הגדולים מ-0 באלכסון הראשי של I_n כלומר n

לכן

$$\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n>0$$

ולכן ~~...~~ מוגדר להם שורש.

נסמן

$$E=\begin{pmatrix}\sqrt{\lambda_1} & & 0\\ & \sqrt{\lambda_2} & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & \sqrt{\lambda_n}\end{pmatrix}$$

$D = E^2$ נסמן

ולכן

$A = PDP^{-1} = PE^2P^{-1} = (PEP^{-1})(PEP^{-1}) = (PEP^{-1})^2$

$B = PEP^{-1}$ נגדיר

$A = B^2$ ונקבל

ב) ~~הוכחה~~

נניח כי $A = B^2$

~~נוכיח כל הערכים העצמיים של A גדולים מ-0.~~

הוכחה:

יהי $v \in V$ כך ש $Av = \lambda v$ נניח

$B^2 v = \lambda v$

$B^2 v - \lambda v = 0$

(1) $(x^2 - \lambda)(B)(v) = 0$

~~ידוע כי B מטריצה B~~

~~יש פולינום $(x^2 - \lambda)$ כך ש~~

~~ב-$R[x]$ ונתון $(x^2+|\lambda|) \,|\, m_B$~~

~~נתון ש $|\lambda|$~~

נניח כי כל הערכים העצמיים של A ~~חיוביים~~ ונקבל

כי ~~A~~ גדולים מ-0, נקבל כי A

חיובים ל-0, נקבל D היא מטריצה אלכסונית שבה

ערכי האלכסון שלה חיוביים.

לכן משפט סילבסטר, A חופפת ל-I_n,

כלומר קיימת $C \in M_n(\mathbb{R})$ הפיכה:

$$A = C^t I_n C = C^t C$$

כל ערכיה העצמיים של A שונים מ-0, כיוון

שאם היה קיים $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$ המקיים:

$$Av = 0v = 0$$

הרי ש-A לא היתה הפיכה.

נשאר להראות שכל

הע"ע של A הם חיוביים

שאלה 2

(ב) תשובה ט: נכון – הזהות $1_V : V \to V$ צמודה לעצמה.

הוכחה:

עבור כל $u, v \in V$ מתקיים:

$$\left(1_V(u), v\right) = (u, v) = \left(u, 1_V(v)\right)$$

ולכן מהגדרה – העתקה צמודה מתקיים:

$$1_V^* = 1_V$$

אוניברסיטת תל-אביב

~~[illegible]~~

טענה 1: ~~[illegible]~~ יהי $T:V\to V$

נניח כי V מ"פ מעל $\mathbb{C}$. יהי $T:V\to V$ העתקה נורמלית. העתקה נורמלית

טענה 1: יהי $v\in V$, $v\neq 0$. אם $T(v)=0$ אזי $T^*(v)=0$

הוכחה

מהגדרת ההעתקה הצמודה, ומכך ש $T=(T^*)^*$ נקבל כי:

$$0=\|T(v)\|^2=(T(v),T(v))=(v,T^*T(v))=(v,TT^*(v))=$$
$$=(T^*(v),T^*(v))=\|T^*(v)\|^2$$

קיבלנו כי $\|T^*(v)\|^2=0$ ולכן, מתכונות המכפלה הפנימית, $T^*(v)=0$

טענה 2: נגדיר את ההעתקה $S=T-\lambda I_V$. אזי S נורמלית.

הוכחה

$$SS^*=(T-\lambda I_V)(T-\lambda I_V)^*=$$
$$=(T-\lambda I_V)(T^*-\bar{\lambda} I_V)=TT^*-\lambda T^*-\bar{\lambda}T+\lambda\bar{\lambda}I_V=$$

לפי נורמליות T:

$$=T^*T-\bar{\lambda}T-\lambda T^*+\lambda\bar{\lambda}I_V=$$
$$=(T^*-\bar{\lambda}I_V)(T-\lambda I_V)=(T-\lambda I_V)^*(T-\lambda I_V)=S^*S$$

טענה 3: ~~[illegible]~~

יהי $v\in V$. אם $T(v)=\lambda v$ אזי $T^*(v)=\bar{\lambda}v$

הוכחה.

$T(v)=\lambda v$

נתון

$$T(v)-\lambda v = (T-\lambda I_V)(v)=0$$

נגדיר $S=T-\lambda I_V$ העתקה

מתקיים $S(v)=0$

לפי טענה 2, אם S היא העתקה נורמלית, אז מתקיים:

$S^*(v)=0$

כלומר

$$(T-\lambda I_V)^*(v) = (T^*-\bar{\lambda} I_V)(v)=0$$

$$T^*(v)-\bar{\lambda} v=0$$

$$T^*(v)=\bar{\lambda} v$$

~~משפט: וקטורים עצמיים של T השייכים לע"ע שונים מאונכים~~

~~הוכחה.~~

~~יהיו $v_1,v_2\in V$ כך ש- $T(v_1)=\lambda v_1$, $T(v_2)=\mu v_2$, $\lambda\neq\mu$~~

~~מתקיים: $T^*(v_2)=\bar{\mu} v_2$~~

~~נראה ש- הוקטורים מאונכים:~~

~~$\lambda(v_1,v_2) = (\lambda v_1, v_2) = (T(v_1), v_2)$~~

משפט: יהי V ממ"פ מעל $\mathbb{C}$ ותהי $T:V\to V$ העתקה לינארית נורמלית

אזי וקטורים עצמיים ~~השייכים~~ השייכים לע"ע שונים

ניצבים זה לזה.

הוכחה.

יהיו $v_1,v_2\in V$ כך ש $T(v_1)=\lambda v_1$ $T(v_2)=\mu v_2$

ו- $\lambda\neq\mu$

אזי:

$$(1)\quad \lambda(v_1,v_2)=(\lambda v_1,v_2)=(T(v_1),v_2)=(v_1,T^*(v_2))$$

לפי טענה 3 מתקיים $T^*(v_2)=\bar{\mu}v_2$. נציב זאת ב-(1):

$$\lambda(v_1,v_2)=(v_1,\bar{\mu}v_2)=\mu(v_1,v_2)$$

ומכאן:

$$(\lambda-\mu)(v_1,v_2)=0$$

כיוון ש $\lambda\neq\mu$, הרי ש $0\neq(\lambda-\mu)$, ולכן

$(v_1,v_2)=0$

כלומר v_1,v_2 ניצבים זה לזה.

מש"ל.

תשובה 3

יהיו $A,B\in M_2(\mathbb{R})$

נסמן ב- m_A, m_B את הפולינומים המינימליים של A,B

בהתאמה. ~~כיון~~

כיון שהסדר של A ו-B שווה ל-2, הרי ש:

$\deg m_A \le 2$ $\quad$ $\deg m_B \le 2$

מדוע?

~~משפט החילוק עם שארית, עבור כל שני פולינומים~~

~~$f,g\in\mathbb{R}[x]$ קיימים $q_1,q_2,r_1,r_2\in\mathbb{R}[x]$ המקיימים:~~

~~$f(x)=q_1(x)m_A$~~

ממשפט החילוק עם שארית בחוגי פולינומים, הרי שעבור

כל שני פולינומים $f,g\in\mathbb{R}[x]$ קיימים $q_A, r_A, q_B, r_B \in \mathbb{R}[x]$

המקיימים:

עדיף לכתוב פולינום ולציין... (או ניתן להשתמש בסימון... ספר...)

$f(x)= \cancel{q_A(x)}\ q_A\cdot m_A(x)+r_A(x)$

$g(x) = q_B m_B(x)+r_B(x)$

1. $\deg r_A<\deg m_A\le 2$ $\quad$ $\deg r_B<\deg m_B\le 2$

כמו כן הצגה זו היא יחידה

כיון ש-A מתחלפת בכפל עם כל איברי $\mathbb{R}$ (I_2 מתחלפת

עם כל המטריצות הסקלריות), הרי ש:

$f(A)= q_A\cdot m_A(A)+r_A(A) = q_A(A)\cdot m_A(A)+r_A(A) =$

$=\cancel{q_A(A)}$

מהגדרת m_A נובע כי $m_A(A)=0$ ולכן

$f(A)= q_A(A)\cdot 0 + r_A(A) = r_A(A)$

משיקולים דומים נובע כי:

$g(B)=r_B(B)$

לכן

(1) $f(A)+g(B) = r_A(A)+r_B(B)$

אנו יודעים כי $\deg r_B, \deg r_A < 2$ ולכן ניתן לרשום

פולינומים אלו כך:

$r_A = a_1 x + a_0$

$\cancel{r_B = b_1 x + b}$

$r_B = b_1 x + b_0$

כאשר $a_1, a_0, b_1, b_0 \in \mathbb{R}$ ואינם בהכרח שונים מ-0.

נציב ~~x~~ הצבה זו ב-(1). ונקבל:

$$f(A)+g(B) = (a_1x+a_0)(A)+(b_1x+b_0)(B) =$$

$$\cancel{=(a_1A+a_0I)+b_1A+b_0I}$$

$$=(a_1A+a_0I)+(b_1B+b_0I)$$

$$= a_1A+b_1B+(a_0+b_0)I$$

כיוון ש $a_1, b_1, (a_0+b_0) \in \mathbb{R}$ נובע מכאן כי

(2) $f(A)+g(B) \in \operatorname{span}\{A,B,I\}$

מתקיים

$$\dim(\operatorname{span}\{A,B,I\}) \le 3$$

אולם

$$\dim(M_2(\mathbb{R})) = 4$$

ולכן קיים $C \in M_2(\mathbb{R})$ המקיים $C \notin \operatorname{span}\{A,B,I\}$

מ-(2) נובע מכאן כי לכל $f,g \in F[x]$ מתקיים:

$$f(A)+g(B) \neq C$$

מ.ש.ל.