



מבחן באלגברה לינארית 2

0366.1112.01

ב' בניסן, תשנ"ט
19 במרץ 1999

לתלמידי דן הרן
מרע א'

משך המבחן: 3 שעות.
אין להשתמש בכל חומר עזר.

ענה על ארבע מתוך חמש השאלות הבאות. (רק ארבע התשובות הראשונות תבדוקנה!)

שאלה 1: יהי V מרחב וקטורי מממד סופי מעל שדה F ותהי $T: V \rightarrow V$ העתקה לינארית. יהיו $v_1, \dots, v_r, w_1, \dots, w_s \in V$ שונים מאפס כך ש-

$$Z(v_1, T) \oplus \dots \oplus Z(v_r, T) = V = Z(w_1, T) \oplus \dots \oplus Z(w_s, T)$$

כמו כן, לכל $1 \leq i \leq r$ יהי $m_i \in F[X]$ מאפס- T של v_i ולכל $1 \leq j \leq s$ יהי $m'_j \in F[X]$ מאפס- T של w_j . נניח כי $m_1 | m_2 | \dots | m_r$ וכן $m'_1 | m'_2 | \dots | m'_s$. הוכח כי $r = s$ וכן $m_i = m'_i$ לכל $1 \leq i \leq r$. נסח (בלי הוכחה) כל טענה עליה הינך מסתמך בהוכחה.

שאלה 2: יהי V מרחב מכפלה פנימית מממד סופי מעל C ותהי $T: V \rightarrow V$ העתקה לינארית נורמלית. הוכח שוקטורים עצמיים של T השייכים לערכים עצמיים שונים - ניצבים זה לזה. עלך להוכיח כל משפט / למה / טענה שתוכח בהרצאה, אם ברצונך להסתמך עליהם.

שאלה 3: תהינה $A, B \in M_2(\mathbb{R})$. הוכח שיש מטריצה $C \in M_2(\mathbb{R})$ שאיננה מהצורה $f(A) + g(B)$ עבור שום זוג של פולינומים $f, g \in \mathbb{R}[X]$.

שאלה 4: תהי $A \in M_n(\mathbb{R})$ סימטרית הפיכה.

(א) הוכח שקיימת $B \in M_n(\mathbb{R})$ כך ש- $B^3 = A$.

(ב) הוכח: קיימת $B \in M_n(\mathbb{R})$ כך ש- $B^2 = A$ אם ורק אם קיימת $C \in M_n(\mathbb{R})$ כך ש- $C^t C = A$.

שאלה 5: תהי

$$A = \begin{pmatrix} -11 & 0 & -9 \\ 32 & 1 & 24 \\ 16 & 0 & 13 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$$

מצא את צורת ז'ורדן שלה J ומצא $P \in M_3(\mathbb{R})$ הפיכה כך ש- $P^{-1}AP = J$.

בהצלחה!

F-38

1. $V \subseteq T$ $v \in V$ $z(v, T)$ m_v $v \in V$ $v \in V$

$V \subseteq T$

2. $v \in T$ m_v $v \in T$ $v \in T$ $v \in T$

$z(v, T)$ T $v \in T$ $v \in T$

S $v \in T$ $v \in T$ $v \in T$ $v \in T$

3. $f \in F[X]$ $v \in T$ $v \in T$ $v \in T$ $v \in T$

$f(T)(v)$ T $v \in T$ $v \in T$

$v \in T$

$f(T)(z(v, T)) = z(f(T)(v), T)$ (1)

$m_v' = \frac{m_v}{\gcd(m_v, m_v')}$ (2)

4. $V \subseteq T$ w_1, w_2, \dots, w_k $v \in T$ $v \in T$

$f \in F[X]$

$V = w_1 \oplus w_2 \oplus \dots \oplus w_k$

$f(T)(v) = f(T)(w_1) \oplus f(T)(w_2) \oplus \dots \oplus f(T)(w_k)$

$v \in T$

$f(T)(V) = f(T)(w_1) \oplus f(T)(w_2) \oplus \dots \oplus f(T)(w_k)$

~~$\deg(m_v) = \dim(z(v, T))$~~ $v \in T$ $v \in T$ $v \in T$

$v \in T$ $v \in T$ $v \in T$ $v \in T$

$\deg(m_v) = \dim(z(v, T))$ $v \in T$ $v \in T$

5. $v \in T$ w_1, w_2, w_k $v \in T$ $v \in T$

$V = w_1 \oplus w_2 \oplus \dots \oplus w_k$

$v \in T$

$\dim(V) = \sum_{i=1}^k \dim(w_i)$

~~$v \in T$~~ $v \in T$ $v \in T$ $v \in T$

~~$v \in T$~~ $v \in T$ $v \in T$ $v \in T$

V. le T 'GIVU'I' zara m W 'n' :7 .NKG

W T T le PIP-B.1 S 'n'

.P-kaas T,S le f(1/2) "WU/la) m_r, m_s 1.0'

m_s/m_r 1.5/

P-kaas m₁, m₂ f(1/2) m₁, m₂ E[F(x)] 1.0' :8 .NKG

m₁ = m₂ 1.5/ . m₂/m₁, m₁/m₂ 1.5/

1.5/

הוכחה

יהי m_T הריבוי הנמוך ביותר של T בפרקטיקום

על V ונניח $Z(V, T) = \sum_{i=1}^r m_i(T) z_i(V, T)$

כאשר $m_i/m_T \in \mathbb{Z}$ ו- $\sum_{i=1}^r m_i/m_T = 1$

כלומר $\sum_{i=1}^r m_i = m_T$

$$(1) \quad m_T(T)(V) = \sum_{i=1}^r m_i(T) z_i(V, T) = \sum_{i=1}^r z_i(m_i(T)(V), T)$$

כאשר $\sum_{i=1}^r m_i = m_T$ ו- $\sum_{i=1}^r m_i/m_T = 1$

כלומר $\sum_{i=1}^r m_i = m_T$

$$\frac{m_i}{\gcd(m_i, m_T)} = \frac{m_i}{m_T} = 1$$

כלומר $\gcd(m_i, m_T) = m_i$ כלומר $m_i | m_T$

$$\dim(m_i(T)(V)) = 0$$

$$\dim(\sum_{i=1}^r z_i(m_i(T)(V), T)) = \deg(1) = 0$$

כלומר

$$\sum_{i=1}^r z_i(m_i(T)(V), T) = \{0\}$$

כלומר $\sum_{i=1}^r m_i = m_T$

$$\dim(m_T(T)(V)) = \sum_{i=1}^r 0 = 0$$

כלומר

$$m_T(T)(V) = \{0\}$$

כלומר $m_T = m_T$

$$m_T | m_T$$

כלומר $m_T | m_T$ ו- $\sum_{i=1}^r m_i/m_T = 1$

כלומר $\sum_{i=1}^r m_i = m_T$

$$m_T = m_T \quad \checkmark$$

כלומר $m_T = m_T$

כלומר $m_T = m_T$

$$\checkmark \quad m_T = m_T = m_T \quad \text{כלומר} \quad \sum_{i=1}^r m_i = m_T \quad \text{כלומר} \quad \sum_{i=1}^r m_i/m_T = 1$$

~~מבטאים את~~

$1 \leq i \leq k$ ו $1 \leq j \leq r$

$1 \leq i \leq k$ ו $1 \leq j \leq r$ ו $m_i = m_j$

$m_i = m_j$ ו $1 \leq i \leq k$ ו $1 \leq j \leq r$

$1 \leq i \leq k$ ו $1 \leq j \leq r$ ו $m_i = m_j$

...

$$m_{k+1}(T)(V) = \bigoplus_{i=1}^r m_{k+1}(T)(v_i)$$

$$(2) m_{k+1}(T)(V) = \bigoplus_{i=1}^r m_{k+1}(T)(v_i) = \bigoplus_{i=1}^r \mathbb{Z}(m_{k+1}(T)(v_i), T)$$

כאן $m_i | m_{k+1}$ ו $1 \leq i \leq k$ ו $1 \leq j \leq r$

$$\dim \mathbb{Z}(v_i) + \dim (\mathbb{Z}(m_{k+1}(T)(v_i), T)) = 0$$

לכן $\dim \mathbb{Z}(m_{k+1}(T)(v_i), T) = -\dim \mathbb{Z}(v_i)$

$$\dim (\mathbb{Z}(m_{k+1}(T)(v_i), T)) = \deg \left(\frac{m_i}{m_{k+1}} \right)$$

$$D_i = \deg \left(\frac{m_i}{m_{k+1}} \right)$$

$$(3) \dim (m_{k+1}(T)(V)) = \sum_{i=1}^r D_i = \sum_{i=1}^k D_i$$

$$m_{k+1}(T)(V) = \bigoplus_{i=1}^s m_{k+1}(T)(w_i) = \bigoplus_{i=1}^s \mathbb{Z}(m_{k+1}(T)(w_i), T)$$

$$\dim(m_{k+1}(T)(V)) = \sum_{i=1}^s \deg\left(\frac{m_i}{\gcd(m_i, m_{k+1})}\right)$$

$m_i = m_i$ $\forall i=1, \dots, s$ $1 \leq i \leq k$ $\forall i=1, \dots, s$

$$\dim(m_{k+1}(T)(V)) = \sum_{i=1}^k 0_i + \sum_{i=k+1}^s \deg\left(\frac{m_i}{\gcd(m_i, m_{k+1})}\right)$$

$$\sum_{i=1}^k 0_i = \sum_{i=k+1}^s \deg\left(\frac{m_i}{\gcd(m_i, m_{k+1})}\right) + \sum_{i=1}^k 0_i$$

$$\sum_{i=k+1}^s \deg\left(\frac{m_i}{\gcd(m_i, m_{k+1})}\right) = 0$$

$$\frac{m_{k+1}}{\gcd(m_{k+1}, m_{k+1})} = 1$$

$$\frac{m_{k+1}}{\gcd(m_{k+1}, m_{k+1})} = 1$$

$$m_{k+1} \mid m_{k+1}$$

$$m_{k+1} \mid m_{k+1}$$

$$m_{k+1} = m_{k+1}$$

$1 \leq i \leq k$ $\forall i=1, \dots, s$ $m_i = m_i$

(-1) s - 1/2 (n) 1/2 1/2 1/2

$$\dim(V) = \sum_{i=1}^r \deg(m_i) = \sum_{i=1}^s \deg(m_i) + \sum_{i=r+1}^s \deg(m_i)$$

s > r s = r + s' n = n'

∴ s (r) n s' s' 1/2 1/2 r' n' 1/2

$$\sum_{i=1}^r \deg(m_i) = \sum_{i=1}^r \deg(m_i) + \sum_{i=r+1}^s \deg(m_i)$$

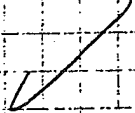
deg

$$\sum_{i=r+1}^s \deg(m_i) = 0$$

∴ k-1 ≤ s 1/2 1/2 r' n' deg(m_i) = 0 1/2 1/2

∴ k-1 ≤ s 1/2 1/2 r' n' r' n' ω = 0 1/2 1/2

∴ r' n' s'



האנטי-מטריצה B של A היא $B = A^{-1}$ כי $AB = BA = I$

$P^{-1}AP = D$

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

~~יש $\lambda \in \mathbb{R}$ כזה~~

יש $\lambda \in \mathbb{R}$ כזה

כיוון שהערות הערך λ הן λ^3 ויש $\lambda \in \mathbb{R}$ כזה ש- $\lambda^3 = \lambda^3$ אז $C = \sqrt[3]{D}$

$$C = \begin{pmatrix} \sqrt[3]{\lambda_1} & & & \\ & \sqrt[3]{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sqrt[3]{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

$C^3 = D$

$P^{-1}AP = C^3$

~~יש $\lambda \in \mathbb{R}$ כזה~~

יש $\lambda \in \mathbb{R}$ כזה

$A = P(P^{-1}AP)P^{-1} = PC^3P^{-1} = (PCP^{-1})(PCP^{-1})(PCP^{-1}) = (PCP^{-1})^3$

אז $B = (PCP^{-1})^{-1}$

$A = B^3$



$$A = C^t C$$

~~$$A = C^t C$$~~

(2) נ"ח

~~$$A = C^t C$$~~

יש

$$A = C^t C = C^t I C$$

I_n - אמת A מדרג n

~~הערה: C היא מטריצה $n \times p$ ו- C^t היא מטריצה $p \times n$~~

כאן p, n הם מספרים קבועים:

~~$$A = P^{-1} D P$$~~

~~$$A = P D P^{-1}$$~~

$$A = P D P^{-1}$$

כיוון $P^{-1} = P^t$ ו- P היא מטריצה אורתוגונלית, הרי $P^{-1} = P^t$

$$A = P D P^t = (P^t)^t D P^t$$

ולכן A מדרג n - D

~~הערה: מטריצה D היא מטריצה $n \times n$ ו- P היא מטריצה $n \times n$~~

כיוון P היא מטריצה אורתוגונלית, הרי $P^{-1} = P^t$

I_n היא מטריצה $n \times n$ ו- D היא מטריצה $n \times n$ ו- P היא מטריצה $n \times n$

~~הערה: D היא מטריצה $n \times n$ ו- P היא מטריצה $n \times n$~~

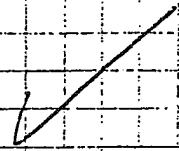
~~הערה: D היא מטריצה $n \times n$ ו- P היא מטריצה $n \times n$~~

אם $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ הם הערכים העצמיים של A

כאן n

P

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n > 0$$



ולכן A היא מטריצה אורתוגונלית

מדרג n

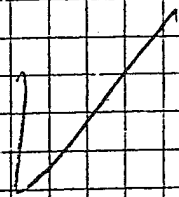
$$E = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & & 0 \\ & \sqrt{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

$$D = E^{-1}$$

$$A = PDP^{-1} = PE^{-1}P^{-1} = (PEP^{-1})(PEP^{-1}) = (PEP^{-1})^2$$

$$B = PEP^{-1}$$

$$A = B^2$$



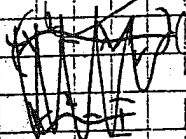
$$A = B^2$$

~~אם A ו- B הם מטריצות הרי $A = B^2$ אז B הוא שורש ריבועי של A .~~

אם $Av = \lambda v$ ו- $v \in V$ אז $Bv = \lambda v$

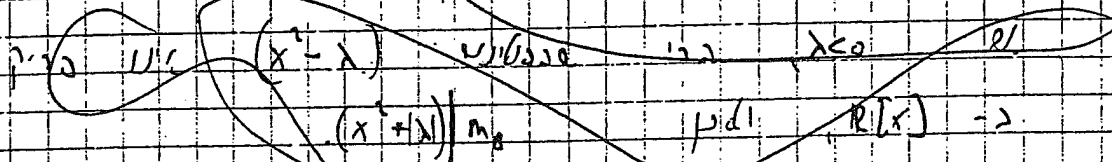
$$Bv = \lambda v$$

$$B^2 v = \lambda^2 v$$



$$(1) (x^2 - \lambda^2)(B)(v) = 0$$

~~אם A ו- B הם מטריצות הרי $A = B^2$ אז B הוא שורש ריבועי של A .~~



אם A ו- B הם מטריצות הרי $A = B^2$ אז B הוא שורש ריבועי של A .

~~אם A ו- B הם מטריצות הרי $A = B^2$ אז B הוא שורש ריבועי של A .~~

אם A ו- B הם מטריצות הרי $A = B^2$ אז B הוא שורש ריבועי של A .

הצגת המטריצה A כמכפלה של מטריצה סימטרית

והמטריצה C הפיכה

המטריצה A היא סימטרית

$$A = C^T I C = C^T C$$

כלומר, A היא מטריצה סימטרית

המטריצה A היא סימטרית

$$Av = 0 \Rightarrow v = 0$$

כלומר, A היא מטריצה סימטרית

~~המטריצה A היא סימטרית~~

2. דוגמה

הבה V ו- W הם שני מרחבי וקטורים. נגדיר $T: V \rightarrow W$ על ידי $T(v) = v$.

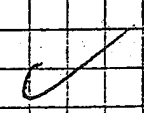
הוכחה

נראה כי T היא איזומורפיזם. נבדוק:

$$(T(v), w) = (v, w) = (v, T(w))$$

כלומר, T היא איזומורפיזם. \square

$$T^* = T$$



~~שאלה 1~~

~~T: V → V היא תהווה א-ניוטרלית~~

~~הוכח כי T: V → V היא תהווה א-ניוטרלית~~

$T^*(v) = 0$ אם $T(v) = 0$ לכל $v \neq 0, v \in V$ הרי $v \in N(T)$

הוכחה

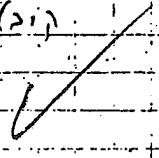
כי $(T^*)^* = T$ ולכן $N(T^*) = N(T)$

וכי

$$0 = \|T(v)\|^2 = (T(v), T(v)) = (v, T^*T(v)) = (v, TT^*(v)) = (T^*(v), T^*(v)) = \|T^*(v)\|^2$$

כי $\|T^*(v)\|^2 = 0$ הרי $T^*(v) = 0$ ולכן $N(T^*) = N(T)$

$$T^*(v) = 0$$



$N = T - \lambda I_v$ הרי $N^* = T^* - \bar{\lambda} I_v$

הוכחה

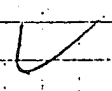
$$N N^* = (T - \lambda I_v)(T^* - \bar{\lambda} I_v) =$$

$$= (T - \lambda I_v)(T^* - \bar{\lambda} I_v) = TT^* - \lambda T^* - \bar{\lambda} T + \lambda \bar{\lambda} I_v =$$

הוכחה

$$= TT^* - \bar{\lambda} T - \lambda T^* + \lambda \bar{\lambda} I_v =$$

$$= (T^* - \bar{\lambda} I_v)(T - \lambda I_v) = (T^* - \bar{\lambda} I_v) N = N^* N$$



~~שאלה 2~~

$T^*(v) = \bar{\lambda} v$ אם $T(v) = \lambda v, v \in V$ הרי $v \in N(T - \lambda I_v)$

הוכחה

$$T(v) = \lambda v$$

לכן

$$T(v) - \lambda v = (T - \lambda I)(v) = 0$$

$\lambda = T - \lambda I$ הפונקציה הנקראת

$$\lambda = \mu(v) = 0$$

הפונקציה

הפונקציה μ היא הפונקציה הנקראת μ ויש לה 2 ערכים

1 והפונקציה

$$\mu^*(v) = 0$$

הפונקציה

$$(T - \lambda I)^*(v) = (T^* - \lambda I)(v) = 0$$

$$T^*(v) - \lambda v = 0$$

$$T^*(v) = \lambda v$$

הוכחה: נניח $v_1, v_2 \in V$ ונניח $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ כך ש-

$$\lambda_1 v_1 = T(v_1) = \lambda_1 v_1 \quad \text{ו} \quad \lambda_2 v_2 = T(v_2) = \lambda_2 v_2$$

$$T^*(v_1) = \lambda_1 v_1$$

$$T^*(v_2) = \lambda_2 v_2$$

$$\lambda(v_1, v_2) = (\lambda_1 v_1, \lambda_2 v_2) = (\lambda_1 T(v_1), \lambda_2 v_2)$$

Gen: $T: V \rightarrow V$ linear map on V over \mathbb{C}

Let $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq \mu$.
 Suppose $T(v_1) = \lambda v_1$ and $T(v_2) = \mu v_2$.

$T(v_1) = \lambda v_1$ $T(v_2) = \mu v_2$ $v_1, v_2 \in V$
 $\lambda \neq \mu$

(1) $\lambda(v_1, v_2) = (\lambda v_1, v_2) = (T(v_1), v_2) = (v_1, T^*(v_2))$

Since $T^*(v_2) = \bar{\mu} v_2$

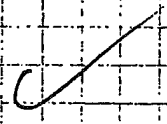
$\lambda(v_1, v_2) = (v_1, \bar{\mu} v_2) = \bar{\mu}(v_1, v_2)$

$(\lambda - \bar{\mu})(v_1, v_2) = 0$

Since $\lambda \neq \bar{\mu}$, $(\lambda - \bar{\mu}) \neq 0$, we have $(v_1, v_2) = 0$.

$(v_1, v_2) = 0$

Therefore, v_1, v_2 are orthogonal.



$A, B \in M_2(\mathbb{R})$ הנה

A, B הן מטריצות 2×2 מעל \mathbb{R} עם m_A, m_B כמובן

כיון שיש לנו $B^{-1}A \in \mathbb{R}$ הרי

$$\deg m_A \leq 2 \quad \deg m_B \leq 2$$

הרי

יש לנו $f, g \in \mathbb{R}[x]$ כך ש-

$$f(x) = q_A(x) \cdot m_A(x) + r_A(x)$$

$$g(x) = q_B(x) \cdot m_B(x) + r_B(x)$$

כאן $q_A, r_A, q_B, r_B \in \mathbb{R}[x]$ ויש לנו

$$f(x) = q_A(x) \cdot m_A(x) + r_A(x)$$

$$g(x) = q_B(x) \cdot m_B(x) + r_B(x)$$

$$\deg r_B < \deg m_B \leq 2$$

$$\deg r_A < \deg m_A = 2$$

כיון שיש לנו $A \in \mathbb{R}$ הרי

יש לנו $f(A) = q_A(A) \cdot m_A(A) + r_A(A)$

$$f(A) = q_A(A) \cdot m_A(A) + r_A(A) = r_A(A)$$

$$= r_A(A)$$

כיון שיש לנו $m_A(A) = 0$ הרי

$$f(A) = q_A(A) \cdot 0 + r_A(A) = r_A(A)$$

כלומר $f(A) = r_A(A)$ ✓

$$g(B) = r_B(B)$$

pr

$$(1) f(A) + g(B) = r_A(A) + r_B(B)$$

ד"ר.11 פ"ו פ"ו $\deg r_B, \deg r_A < 2$ ו' מ"ו' ו"ל

י"פ' ו"ל ו"ו.ד"ו

$$r_A = a_1 x + a_0$$

~~$$r_B = b_1 x + b_0$$~~

$$r_B = b_1 x + b_0$$

ו"ר מ"ו ו"ו.ד"ו מ"ו' ו"ל $a_1, a_0, b_1, b_0 \in \mathbb{R}$ ו"ו

י"פ' ו"ל (1)-2 ו"ו ו"ו

$$f(A) + g(B) = (a_1 x + a_0)(A) + (b_1 x + b_0)(B) =$$

~~$$= (a_1 A + a_0 I) + (b_1 A + b_0 I)$$~~

$$= (a_1 A + a_0 I) + (b_1 B + b_0 I)$$

$$= a_1 A + b_1 B + (a_0 + b_0) I$$

ו' מ"ו ו"ו ו"ו $a_1, b_1, (a_0 + b_0) \in \mathbb{R}$ ו"ו

$$(2) f(A) + g(B) \in \text{span}\{A, B, I\}$$

מ"ו

$$\dim(\text{span}\{A, B, I\}) \leq 3$$

$$\dim(M_2(\mathbb{R})) = 4$$

מ"ו

$$C \notin \text{span}\{A, B, I\} \quad \text{מ"ו} \quad C \in M_2(\mathbb{R}) \quad \text{מ"ו} \quad \mu$$

י"פ' ו"ל $f, g \in F[x]$ ו"ו ו"ו (2)-ו

$$f(A) + g(B) \neq C \quad \checkmark$$

ו"ו