TEL AVIV UNIVERSITY אוניברסיטת תל-אביב
RAYMOND AND BEVERLY SACKLER FACULTY OF EXACT SCIENCES
SCHOOL OF MATHEMATICAL SCIENCES
הפקולטה למדעים מדויקים ע"ש ריימונד ובברלי סאקלר
בית הספר למדעי המתמטיקה

מבחן באלגברה לינארית 2

0366.1112.01

ג' באב, תשנ"ט
16 ביולי 1999

לתלמידי דן הרן
מועד ב'

משך המבחן: 3 שעות.
אין להשתמש בכל חומר עזר.
ענה על ארבע מתוך חמש השאלות הבאות. (רק ארבע התשובות הראשונות תבדקנה!)

שאלה 1: יהיו $V,\bar{V}$ מרחבים וקטוריים ממימד סופי מעל שדה F ותהי $T\colon V\to V$ העתקה לינארית. יהי $v_1\in V$ כך ש-$Z(v_1,T)=\{g(T)(v_1)\mid g\in F[X]\}$ בעל המימד המקסימלי האפשרי. תהי $R\colon V\to\bar{V}$ העתקה לינארית, על $\bar{V}$, כך ש-$\operatorname{Ker} R=Z(v_1,T)$, ותהי $\bar{T}\colon\bar{V}\to\bar{V}$ ההעתקה המושרית מ-T על $\bar{V}$. יהי $w\in\bar{V}$ ויהי $m_w\in F[X]$ מאפס-$\bar{T}$ שלו. הוכח שיש $v\in V$ כך שמאפס-T שלו הוא m_w והוא מחלק את מאפס-T של v_1.

שאלה 2: יהי V מרחב מכפלה פנימית ממימד סופי מעל $\mathbb{C}$ ותהי $T\colon V\to V$ העתקה לינארית נורמלית. יהי $u_1,\dots,u_n$ בסיס אורתונורמלי של V. הוכח כי התנאים הבאים שקולים זה לזה:

(א) $T^*T=1_v$.

(ב) $T(u_1),\dots,T(u_n)$ בסיס אורתונורמלי של V.

(ג) $(T(u),T(v))=(u,v)$ לכל $u,v\in V$.

אין להסתמך על המשפט שמוכיח שקילויות אלה.

שאלה 3: יהי V מרחב וקטורי ממימד 6 מעל $\mathbb{C}$ ותהי $T\colon V\to V$ העתקה לינארית. יהי W תת מרחב אינוריאנטי-T ממימד 3 ונסמן ב-S את הצמצום של T ל-V.

(א) נתון שיש $v\in V$ כך ש-$(T-^2-T)^5(v)\neq 0$. האם יתכן כי $\{0,1\}$ היא קבוצת הערכים העצמיים של T? (כלומר, $0,1$ הם ערכים עצמיים של T ואין אחרים.) הוכח או הפרך.

(ב) נתון שאין ל-W בסיס המורכב מוקטורים עצמיים של S. האם נכון שגם ל-V אין בסיס המורכב מוקטורים עצמיים של T? הוכח או הפרך.

F-39

שאלה 4: האם ההעתקה הלינארית $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ המוגדרת על ידי

$$T(x,y) = (3x+y,-x)$$

הנה סימטרית ביחס למכפלה הפנימית הבאה על $\mathbb{R}^2$:

$$\langle (x_1,x_2),(y_1,y_2)\rangle = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2 \quad ?$$

שאלה 5: הראה שהמטריצות מסדר $n \times n$

$$\begin{pmatrix} 0 & & & & \\ 1 & 0 & & & \mathbf{0} \\ & 1 & 0 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & & \\ & & & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & a_{13} & & \cdots & a_{1n} \\ & 0 & 1 & a_{24} & \cdots & a_{2n} \\ & & & & & \vdots \\ & & 0 & \ddots & & \vdots \\ & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & & & & \ddots & 1 \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

דומות.

בהצלחה!