TEL AVIV UNIVERSITY אוניברסיטת תל-אביב
RAYMOND AND BEVERLY SACKLER FACULTY OF EXACT SCIENCES
SCHOOL OF MATHEMATICAL SCIENCES
הפקולטה למדעים מדויקים ע"ש ריימונד ובברלי סאקלר
בית הספר למדעי המתמטיקה

0366.1112
ו' בתמוז, תשנ"ח
30 ביוני 1998

מבחן באלגברה לינארית 2

לתלמידי דן הרן ומשה ירדן

משך המבחן: 3 שעות.
אין להשתמש בכל חומר עזר.
ענה על ארבע מתוך חמש השאלות הבאות. (רק ארבע התשובות הראשונות תבדקנה!)

שאלה 1: נסח והוכח את משפט ההצגה הספקטרלית עבור העתקות נורמליות מעל $\mathbb{C}$. נסח (ללא הוכחה) את משפטי העזר העיקריים שבהם אתה משתמש בהוכחתך.

שאלה 2: יהיו R חוג ראשי, p אבר ראשוני של R ו V מודול-R נוצר סופית בעל מעריך p^r. הוכח שקימים $v_1,\dots,v_n \in V$ וקימים מספרים טבעיים $r = r_1 \geq r_2 \geq \cdots \geq r_n \geq 1$ כך ש $\operatorname{ord}(v_i) = p^{r_i}$, $i = 1,\dots,n$ ומתקיים $V = \bigoplus_{i=1}^n Rv_i$.

שאלה 3: הוכח ש $\lim_{n\to\infty} A^n = 0$ עבור המטריצה

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 20 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{9} & -1 \end{pmatrix}.$$

שאלה 4: יהי V מרחב וקטורי ממעד סופי מעל שדה K. תהי $\mathcal{L}$ קבוצה של העתקות לינאריות של V לתוך עצמו המתחלפות זו עם זו בכפל. בניח שהפולינום המזערי של כל $T \in \mathcal{L}$ מתפרק מעל K לגורמים לינאריים מתוקנים השונים זה מזה. הוכח שקים ל V בסיס $v_1,\dots,v_n$ כך שכל המטריצות המיצגות את אברי $\mathcal{L}$ ביחס לבסיס זה אלכסוניות.

שאלה 5: יהי V מרחב כל המטריצות מסדר 3×3 מעל שדה K. נסמן ב $T\colon V \to V$ את העתקת ההחלפה: $T(B) = B^t$.

(א) מצא את הפולינום המזערי של T.

(ב) לכל ערך עצמי של T זהה את מרחב הוקטורים העצמיים של T וחשב את ממדו.

(ג) הוכח שקים ל V בסיס כך שהמטריצה המתאימה ל T לפי בסיס זה הנה אלכסונית.

(ד) רשם את המטריצה האלכסונית הזו באפן מפרש.

בהצלחה!

E-34