TEL AVIV UNIVERSITY אוניברסיטת תל-אביב
RAYMOND AND BEVERLY SACKLER FACULTY OF EXACT SCIENCES
SCHOOL OF MATHEMATICAL SCIENCES
הפקולטה למדעים מדוייקים ע"ש ריימונד ובברלי סאקלר
בית הספר למדעי המתמטיקה

מבחן באלגברה לינארית 2

0366.1112

לתלמידי פרופ' קליין ופרופ' הרן

כ"א בסיון, תשנ"ז

26 ביוני 1997

משך המבחן: 3 שעות.
אין להשתמש בכל חומר עזר.
ענה על ארבע מתוך שש השאלות הבאות. (רק ארבע התשובות הראשונות תבדקנה!)

שאלה 1: יהי F שדה ויהי $G(X) = \sum_i C_i X^i$ פולינום שמקדמיו הם מטריצות ב-$\mathrm{M}_n(F)$. תהי $A \in \mathrm{M}_n(F)$ כך ש-$\sum_i C_i A^i = 0$.

(א) הוכח כי $IX - A$ מחלק את $G(X)$, כלומר, יש פולינום $H(X)$ מעל $\mathrm{M}_n(F)$ כך שמתקיים $G(X) = H(X)(IX - A)$.

(ב) יהי $g(X) = \det G(X)$. הוכח כי הפולינום האפייני $f_A(X)$ מחלק את $g(X)$ והסק ש-$g(A) = 0$.

שאלה 2: תהי $A \in \mathrm{M}_{10}(\mathbb{C})$. נתון כי $XI_{10} - A$ שקולה (על ידי פעולות אלמנטריות על מטריצות של פולינומים) למטריצה האלכסונית

$$\begin{pmatrix} 1 &&&&&&&&& \\ & 1 &&&&&&&& 0 \\ && X &&&&&&& \\ &&& X+2 &&&&&& \\ &&&& X^2 &&&&& \\ &&&&& X+2 &&&& \\ &&&&&& (X^2+4)X &&& \\ & 0 &&&&&& (X+2)^2 && \\ &&&&&&&& 1 & \\ &&&&&&&&& 1 \end{pmatrix}$$

חשב את המחלקים האלמנטריים, את הגורמים האינוריאנטיים, את הפולינום המזערי של A ואת צורת ז'ורדן של A.

שאלה 3: יהי V מרחב מכפלה פנימית בעל מימד סופי מעל $\mathbb{C}$. תהי $T: V \to V$ העתקה לינארית. הוכח כי T נורמלית אם ורק אם $||Tv|| = ||T^*v||$ לכל $v \in V$.

1

F30

שאלה 4: נתונה מטריצה

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -17 & -3 & 8 \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

מצא את צורת ז'ורדן שלה J ומצא מטריצה A כך ש- $P^{-1}AP = J$.

שאלה 5: תהיינה $A, B, C \in M_n(\mathbb{C})$ מטריצות שונות מ-0 ויהי $g(X) \in \mathbb{C}[X]$ פולינום.

(א) הוכח: אם $\lambda \in \mathbb{C}$ אינו ערך עצמי של A אזי $A - \lambda I$ הפיכה. יתר על כן, אם לפולינום $g(X)$ אין שורש השווה לאחד הערכים העצמיים של A אזי $g(A)$ הפיכה.

(ב) נניח $AC = CB$. הוכח כי עבור $j = 1, 2, 3 \ldots$ מתקיים $A^jC = CB^j$ ו- $g(A)C = Cg(B)$. הסק כי ל-A ו-B ערך עצמי משותף.

שאלה 6: הוכח את משפט ההתמדה: אם $A \in M_n(\mathbb{R})$ מטריצה סימטרית אשר תופפת לשתי המטריצות האלכסוניות הבאות

$$D_{p,q} = \operatorname{diag}(\overbrace{1, \ldots, 1}^{p}, \overbrace{-1, \ldots, -1}^{q}, 0, \ldots, 0), \quad D_{p',q'} = \operatorname{diag}(\overbrace{1, \ldots, 1}^{p'}, \overbrace{-1, \ldots, -1}^{q'}, 0, \ldots, 0)$$

אז $q = q'$, $p = p'$.

בהצלחה!

2