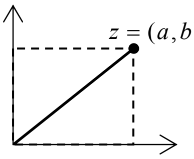
אלגברה לינארית – סיכום

1. שדות

<u>הגדרה</u>: קבוצה שבה מוגדרות שתי פעולות- כפל וחיבור.

<u>אקסיומות השדה:</u>

1. סגירות בחיבור: $\forall a,b \in K \ \ \exists c \in K \mid a+b=c$
2. סגירות בכפל: $\forall a,b \in K \ \ \exists c \in K \mid a \cdot b=c$
3. קומוטטיביות בחיבור: $\forall a,b \in K \ \ a+b=b+a$
4. קומוטטיביות בכפל: $\forall a,b \in K \ \ a \cdot b=b \cdot a$
5. קיום אדיש חיבורי (0): $\exists \ 0 \in K \mid a+0=a$
6. קיום אדיש כפלי (1): $\exists \ 1 \in K \mid a \cdot 1=a$
7. נגדי חיבורי: $\forall a \in K \ \ \exists (-a) \in K \mid a+(-a)=0$
8. הופכי כפלי: $\forall a \in K \ \ \exists (a^{-1}) \in K \mid a \cdot (a^{-1})=1$
9. אסוציאטיביות בחיבור: $\forall a,b \in K \ \ (a+b)+c=a+(b+c)$
10. אסוציאטיביות בכפל: $\forall a,b \in K \ \ (a \cdot b) \cdot c=a \cdot (b \cdot c)$
11. דיסטריביוטיביות: $\forall a,b \in K \ \ a \cdot (b+c)=a \cdot b+a \cdot c$



2. מספרים מרוכבים

<u>הגדרה</u>: מספר מרוכב הוא זוג סדור של מספרים ממשיים. $(a,b) \mid a,b\in\mathbb{R}$

קבוצת המספרים המרוכבים היא שדה.

$z=a+ib$ $\qquad i^2=-1$

$a=\mathrm{Re}(z)$ החלק הממשי של z

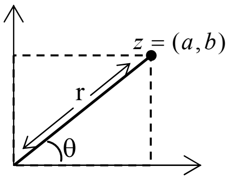
$b=\mathrm{Im}(z)$ החלק המדומה של z

- חיבור/חיסור: $(a,b)\pm(c,d)=(a\pm c,b\pm d)$
  $z_1\pm z_2=(a_1\pm a_2)+i(b_1\pm b_2)$
- האיבר האפסי: $(0,0)$ $\quad z=0+0i$
- מספר נגדי: $(-a,-b)$ $\quad z=-a-ib$
- כפל: $(a,b)\cdot(c,d)=(a\cdot c-b\cdot d,a\cdot d+c\cdot b)$
  $z_1\cdot z_2=(a_1\cdot a_2-b_1\cdot b_2)+i(a_1\cdot b_2+a_2\cdot b_1)$
- אדיש כפלי: $(1,0)$ $\quad z=1+0i$
- מספר צמוד: $(a,-b)$ $\quad \overline{z}=a-ib$
- מודול: $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$ (מרחק הנקודה מראשית הצירים)
- מספר הופכי: $\dfrac{a}{a^2+b^2}-\dfrac{ib}{a^2+b^2}$
- חילוק: $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{z_1\cdot\overline{z_2}}{|z_2|^2}$
- ארגומנט: $\arg(z)=\theta+360^\circ k$ $\quad a=|z|\cdot\cos\theta$
  $\tan\theta=\dfrac{a}{b}$ $\quad b=|z|\cdot\sin\theta$

(הזוית בין הקו המחבר את z לראשית והחלק החיובי של הציר הממשי)

<u>תכונות</u>:

- $|z_1+z_2|\le|z_1|+|z_2|$
- $|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$
- $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\dfrac{|z_1|}{|z_2|}$
- $|z^n|=|z|^n$
- $z+\overline{z}=2a=2\,\mathrm{Re}(z)$
- $z-\overline{z}=2b=2\,\mathrm{Im}(z)$
- $\overline{z_1\pm z_2}=\overline{z_1}\pm\overline{z_2}$
- $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$
- $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$
- $z\cdot\overline{z}=|z|^2$
- $\overline{z^n}=\overline{z}^n$
- $\overline{\overline{z}}=z$



<u>הצגה טריגונומטרית:</u> $z = r \cdot \text{cis}(\theta)$

- כפל: $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot \text{cis}(\theta_1 + \theta_2)$
- חילוק: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot \text{cis}(\theta_1 - \theta_2)$
- חזקות: $z^n = r^n \cdot \text{cis}(n\theta)$
- מציאת הארגומנט:

$$\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$$

$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$$

- מעבר מהצגה טריגונומטרית לאגברית ולהיפך:

$$z = a + ib$$

$$\tan\theta = \frac{b}{a}$$

$$r = |z|$$

$$z = r \cdot \text{cis}(\theta)$$

$$z = r\big(\cos(\theta) + i\sin(\theta)\big)$$

$$a = r \cdot \cos(\theta) \quad b = r \cdot \sin(\theta)$$

(את הסימנים של a ו-b
קובעים לפי הרביע שבו
נמצאת הזוית)

- מספר צמוד: $\overline{z} = r\,\text{cis}(-\theta)$
- מספר הופכי: $\frac{1}{z} = \frac{1}{r^2} \cdot \text{cis}(-\theta)$
- שורש: $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \cdot \text{cis}\left(\frac{\theta + 360^\circ k}{n}\right)$
- שורשי יחידה – שורשים של המספר 1. $k = 0,1,2,\ldots,(n-1)$ $\sqrt[n]{1} = \text{cis}\left(\frac{360^\circ k}{n}\right)$

שורשי היחידה הם מהצורה: $\omega^0, \omega^1, \omega^2, \ldots, \omega^{n-1}$

משפט: סכום כל שורשי היחידה מסדר n הוא 0.

- חזקות טבעיות של i – חוזרות על עצמם כל 4 חזקות: $i^n \to n = 4k + m,\ m = 0,1,2,3$

3. פולינומים

- $$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$
  $$p(x) = a_n (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n)$$

- לכל פולינום ממעלה n יש בדיוק n שורשים (במרוכבים).

- הניחוש האינטלגנטי:

כאשר המקדמים שלמים, אם לפולינום יש שורש רציונלי $\frac{m}{n}$, אז $n \mid a_n \quad m \mid a_0$

- 1 הוא שורש אם"ם סכום המקדמים הוא 0.

- מציאת הריבוי של x_0 היא ע"י חילוק של הפולינום ב-$(x-x_0)$, ובדיקה אם הוא שורש של הפולינום החדש שמתקבל. אפשרות אחרת – ע"י הנגזרת: x_0 הוא שורש מריבוי k אם: $p(x_0) = 0,\ p'(x_0) = 0,\ p''(x_0) = 0, \ldots, p^{(k)}(x_0) \neq 0$

- נוסחאות וייטה:
  $$x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n = \frac{(-1)^n \cdot a_0}{a_n}$$
  $$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

- אם יש שורש שהוא מספר מרוכב מריבוי k, גם הצמוד שלו הוא שורש, מאותו ריבוי.

- לכל פולינום ממעלה אי זוגית יש לפחות שורש אחד ממשי.

4. מטריצות

<u>הגדרה</u>: מטריצה מעל שדה F היא טבלה של מספרים הלקוחים מהשדה F.

<u>סימון</u>: $A=A_{m\times n}=\left(a_{ij}\right)$ כאשר m הוא מספר השורות ו-n הוא מספר העמודות. i מראה באיזו שורה נמצא המספר, ו-j מראה את מספר העמודה.

<u>שיוויון מטריצות</u>: מטריצות שוות אך ורק אם הגודל שווה, וכל איבריהן שווים בהתאמה.

מטריצה ריבועית A נקראת <u>הפיכה</u> אם קיימת מטריצה ריבועית מאותו גודל B, כך ש- $AB=BA=I$.

סימון: $B=A^{-1}$

* אלכסון ראשי – האיברים a_{ii} במטריצה ריבועית.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots a_{2n} \\ \vdots & & \ddots \quad \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots a_{nn} \end{pmatrix}$$

<u>פעולות</u>:

- כפל בסקלר: $\alpha\cdot A=\left(\alpha\cdot a_{ij}\right)$ (הגודל נשאר אותו דבר).
- חיבור וחיסור: $B\pm A=\left(b_{ij}\pm a_{ij}\right)$ (מוגדר רק כאשר המטריצות הן באותו גודל).
- מטריצה מוחלפת: $A^t=\left(a_{ji}\right)$ (השורות הופכות לעמודות).
- כפל: $A\cdot B=C \;\Rightarrow\; c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\cdot b_{kj}$

<u>תכונות</u>:

- $A+B=B+A$
- $A+\left(B+C\right)=\left(B+A\right)+C$
- $A+0=A$
- $A+(-A)=0$
- $\alpha\left(A+B\right)=\alpha B+\alpha A$
- $\left(\alpha+\beta\right)A=\alpha A+\beta A$
- $\left(\alpha\beta\right)A=\alpha\left(\beta A\right)$
- $\left(A+B\right)^t=B^t+A^t$
- $\left(A^t\right)^t=A$
- $\left(\alpha A\right)^t=\alpha A^t$
- $A\cdot B\neq B\cdot A$
- $\left(AB\right)C=A\left(BC\right)$
- $A\left(B+C\right)=AB+AC$
- $\left(B+C\right)A=BA+CA$
- $A\cdot 0=0\cdot A=0$
- $\alpha\left(AB\right)=\left(\alpha A\right)B=A\left(\alpha B\right)$
- $A\cdot I=I\cdot A=A$
- $\left(AB\right)^t=B^tA^t$

<u>מטריצות מיוחדות</u>:

מטריצה ריבועית: $A_{n\times n}$

מטריצת האפס: כל האיברים הם 0. סימון: $O_{m\times n}$

מטריצות ריבועיות:

מטריצת היחידה: כל איברי האלכסון הראשי הם 1, ושאר האיברים הם 0. סימון: I_n

מטריצה סימטרית: $A^t=A$

מטריצה אנטי- סימטרית: $A^t=-A$

מטריצה אלכסונית: כל האיברים מחוץ לאלכסון הראשי הם 0.

מטריצה סקלרית: מטריצה אלכסונית שבה כל האיברים באלכסון שווים.

מטריצה משולשת עליונה: כל האיברים מתחת לאלכסון הראשי הם 0.

מטריצה משולשת תחתונה: כל האיברים מעל לאלכסון הראשי הם 0.

וקטור שורה: מטריצה בעלת שורה אחת בלבד.
וקטור עמודה: מטריצה בעלת עמודה אחת בלבד.

<u>דירוג מטריצות:</u>
פעולות יסודיות על שורות של מטריצות:
1. החלפה של שורה אחת בשורה אחרת $R_i \leftrightarrow R_j$
2. כפל שורה בסקלר שונה מ-0 $R_i \leftrightarrow \alpha R_i$
3. הוספת כפולה של שורה לשורה אחרת $R_j \leftrightarrow R_j + \alpha R_i$

שתי מטריצות נראות *שקולות שורה* אם אפשר להגיע מאחת לשניה ע"י מספר סופי של פעולות יסודיות על שורות.
איבר מצויין (מוביל) – האיבר הראשון משמאל בכל שורה השונה מ-0.
מטריצה נראת *מדורגת* אם:
א. שורות האפסים מופיעות אחרי שורות שאינן אפסיות.
ב. מספר האפסים לפני איבר מצויין גדל משורה לשורה, עד שמגיעים לשורות האפסים.
מטריצה נקראת *מדורגת מצומצמת (קנונית)* אם:
א. היא מדורגת.
ב. כל האיברים המצויינים שווים ל-1.
ג. כל איבר מצויין הוא היחיד השונה מ-0 בעמודה שלו.
כל מטריצה שקולת שורות אפשר להעביר לצורה קנונית אחת ויחידה.
דרגת מטריצה – מספר השורות השונות מ-0 בצורה המדורגת.
מטריצות אלמנטריות (יסודיות) – מטריצת יחידה שעשו עליה פעולה אחת על שורה. ביצוע פעולות על שורות במטריצה כלשהי שקול להכפלה במטריצה אלמנטרית. מטריצות נקראות שקולות שורה אם"ם קיימת מכפלה של מטריצות אלמנטריות P כך ש- $P \cdot A=B$

<u>פתרון מערכות משוואות לינאריות באמצעות מטריצות:</u>
ע"מ לפתור מע' משוואות יש להגיע לצורה מדורגת ע"י פעולות יסוגיות על שורות.

מערכת משוואות לינאריות:
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

מטריצה המייצגת את המערכת:
$$A\cdot x=b = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

למערכת משוואות הומוגנית (כל ה- b_i הם 0) יש תמיד לפחות פתרון אחד, הפתרון הטריביאלי- $(0,0,\ldots,0)$. חוץ מזה יכולים להיות אינסוף פתרונות. במערכת משוואות לא הומוגנית יש 3 אפשרויות: פתרון יחיד, אינסוף פתרונות, וסתירה (אין פתרון).
$r(A) \neq r(A|b) \Leftarrow$ אין פתרון. מספר דרגות החופש: $n - r(A)$. אם מספר דרגות החופש הוא 0, אז הפתרון הוא יחיד.

5. מרחבים וקטוריים

<u>הגדרה</u>- מרחב וקטורי V מעל שדה F הוא קבוצה V שמוגדרות לה שתי פעולות: חיבור בין איברי V, וכפל של איברי V באיברי שדה F.

<u>אקסיומות של מרחב וקטורי</u>:
1. סגירות בחיבור: $v_1+v_2\in V \Leftarrow v_1,v_2\in V$
2. אסוציאטיביות בחיבור: $v_1+\left(v_2+v_3\right)=\left(v_1+v_2\right)+v_3$
3. קומוטטיביות בחיבור: $v_1+v_2=v_2+v_1$
4. אדיש חיבורי: $\forall v\in V$, $v+0=v$ $\left(0\in V\right)$
5. איבר נגדי: $\forall v\in V$, $\exists\left(-v\right)$ כך ש $v+\left(-v\right)=0$
6. סגירות בכפל בסקלר: $\alpha\in F$, $v\in V$ $\Leftarrow$ $\alpha v\in V$
7. $\left(\alpha+\beta\right)v=\alpha v+\beta v$
8. $\left(\alpha\beta\right)v=\alpha\left(\beta v\right)$
9. $\alpha\left(v_1+v_2\right)=\alpha v_1+\alpha v_2$
10. אדיש כפלי: $1\in F$, $v\in V$ $\Leftarrow$ $1\cdot v=v$

<u>הגדרה</u>- V מרחב וקטורי, W תת קבוצה של V. W הוא תת מרחב אם הוא מרחב בפני עצמו, מוגדרות בו אותן פעולות כמו ב-V, והוא מעל אותו שדה כמו V.

<u>משפטים</u>:
- V מרחב וקטורי מעל F, $v\in V$, $\alpha\in F$, אז:
  I. $0\cdot v=0 \Leftarrow 0\in F$
  II. $0\cdot\alpha=0 \Leftarrow 0\in V$
  III. $\alpha\cdot v=0 \Rightarrow \alpha=0$ או $v=0$
  IV. $\left(-\alpha\right)v=-\alpha\left(v\right)=\alpha\left(-v\right)$
- V מ"ו, W תת קבוצה של V. W הוא תת מרחב אם"ם:
  I. $W\neq\varnothing$ או $0\in W$
  II. $w_1+w_2\in W \Leftarrow w_1,w_2\in W$
  III. $\alpha\in F$, $w\in W$ $\Leftarrow$ $\alpha w\in W$
- V מ"ו, U, W ת"מ של V.
  I. $U\cap W$ (חיתוך) הוא תמיד ת"מ של V
  II. $U+W$ הוא תמיד ת"מ של V
  III. $U\cup W$ (איחוד) הוא ת"מ של V אם $U\subseteq W$ או $U\supseteq W$

<u>הגדרה</u>- V מרחב וקטורי, $\left\{v_1,v_2,\ldots,v_n\right\}$ איברים ב-V, $\left\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\right\}$ איברים בשדה. הביטוי $\alpha_1v_1+\alpha_2v_2+\ldots+\alpha_nv_n$ נקרא צירוף (קומבינציה) לינארי של $\left\{v_1,v_2,\ldots,v_n\right\}$.

אוסף כל הצירופים הלינאריים נקרא הפרישה הלינארית של $\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$.
סימון: $span\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$.
<u>הגדרה</u>- מרחב השורות של מטריצה הוא המרחב ע"י השורות שלה (כנ"ל מרחב עמודות).

<u>משפטים</u>:

- פרישה לינארית היא ת"מ הכי קטן של V שמכיל את תת הקבוצה $\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$.
  הקבוצה $\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ נקראת קבוצה פורשת של הת"מ שנוצר מ- $span\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$
- למטריצות שקולות שורה יש אותו מרחב שורות.
- אוסף הפתרונות של מע' משוואות הומו' הוא תמיד מ"ו. אוסף הפתרונות של מע' לא הומוגנית אף לא לא יהי מ"ו.

<u>הגדרה</u>- A מטריצה ריבועית. A נקראת הפיכה אם קיימת B כך ש AB=BA=I. B נקראת ההופכית של A. סימון: $B=A^{-1}$

<u>משפטים</u>:

- ההופכי הוא יחיד.
- אם AB הפיכה אז גם BA הפיכה, ו $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$
- $\left(A^t\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^t$
- הדרגה של מטריצה הפיכה $n\times n$ היא n, והיא שקולת שורות למטריצת היחידה (המטריצה הקנונית של מטריצה הפיכה היא מטריצת היחידה).
- כל מטריצה הפיכה היא מכפלה של מטריצות אלמנטריות.

<u>מציאת מטריצה הפיכה</u>: אותן פעולות אלמנטריות (באותו סדר) שמעבירות את A ל-I, יעבירו את I ל- A^{-1}.

<u>הגדרה</u>- V מרחב וקטורי, $\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ איברים ב-V. הם יקראו תלויים לינארית אם קיימים סקלרים $\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\}$, לא כולם אפסיים, כך ש $\alpha_1v_1+\alpha_2v_2+\ldots+\alpha_nv_n=0$. אם האפשרות היחידה שזה יתקיים היא שכל הסקלרים יהיו 0, אז הוקטורים יקראו בלתי תלויים לינארית.

<u>משפטים</u>:

- כל קבוצה שמכילה את ה-0 היא תלויה.
- אם $\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ תלויים, אז לפחות אחד מהם הוא צירוף לינארי של האחרים.
- אם $\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ תלויים, אז לפחות אחד מהם הוא צירוף לינארי של קודמיו.
- קבוצה שמכילה קבוצה תלויה, גם היא תלויה.
- תת קבוצה של קבוצה בלתי תלויה, גם היא בלתי תלויה.
- שורות שונות מ-0 במטריצה מדורגת הן בלתי תלויות.

הגדרה- V מרחב וקטורי. קבוצה פורשת ובת"ל נקראת בסיס של V (כל איבר ב-V אפשר לרשות כצירוף לינארי של איברי הבסיס). מספר האיברים בבסיס נקרא מימד.
סימון: $\dim(V)$

משפטים:

- מספר האיברים בקבוצה פורשת גדול או שווה ממספר האיברים בקבותה בת"ל. לכן בכל בסיס של אותו מרחב יהיה אותו מספר של איברים.
- בסיס הוא קבוצה פורשת מינימלית, וקבוצה בת"ל מקסימלית.
- אם המימד הוא n, כל קבוצה אם n+1 איברית תהיה תלויה, כל קבוצה בת"ל עם n איברים היא בסיס, וכל קבוצה פורשת עם n איברים היא בסיס.
- כל קבוצה בת"ל אפשר להשלים לבסיס.
- מימד מרחב השורות של מטריצה שווה למימד מרחב העמודות.
- $r(AB) \le r(A)$, $r(AB) \le r(B)$ (כשמכפילים מטריצות הדרגה לא תגדל).
- $\dim(U+W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$

הגדרה- V מ"ו, B=$\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ בסיס. אם נרשום איבר כלשהו v כצירוף לינארי של איברי הבסיס $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n$, הסקלרים $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ נקראים הקואורדינטות של v ביחס לבסיס B. סימון: $[\mathrm{v}]_{\mathrm{B}}$. כל וקטור אפשר לרשות בצורה של צירוף לינארי של איברי הבסיס באופן יחיד.

הגדרה- $\mathrm{V}_1, \mathrm{V}_2$ שני מרחבים וקטוריים מעל אותו שדה F. פונקציה $\mathrm{T}\colon \mathrm{V}_1 \to \mathrm{V}_2$ המתאימה לאיברים מ- V_1 איברים מ- V_2. T נקראת לינארית אם:

א. $T(u+v) = T(u) + T(v)$ לכל $u, v \in V_1$

ב. $T(\alpha v) = \alpha T(v)$ לכל $\alpha \in F$, $v \in V_1$

הגרעין של T- $\ker(T) = \{v \in V_1 \mid T(v) = 0\}$

התמונה של T- $\mathrm{Im}(T) = \{T(v) \mid v \in V_1\}$. מימד התמונה נקרא דרגת הטרנספורמציה.

משפטים:

- T(0)=0
- T(-v)= -T(v)
- הגרעין הוא ת"מ של V_1. התמונה היא ת"מ של V_2.
- T חח"ע אם"ם יש בגרעין רק את איבר ה-0: $\ker(T) = \{0\}$.
- T על אם"ם התמונה היא כל V_2: $\dim(\mathrm{Im}(T)) = \dim(V_2)$.
- אם $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ פורשים את V_1 אז $\{T(v_1), T(v_2), \ldots, T(v_n)\}$ פורשים את $\mathrm{Im}(T)$.
- אם B=$\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ הוא בסיס ל- V_1 ו- $\{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ הם וקטורים ב- V_2, אז קיימת ט"ל אחת ויחידה כך ש- $T(u_1) = w_1, T(u_2) = w_2, \ldots, T(u_n) = w_n$.
- $\dim(V_1) = \dim(\ker(T)) + \dim(\mathrm{Im}(T))$

- $T: F^n \to F^m$ ט"ל המוגדרת ע"י T(v)=Av, A מטריצה $m\times n$. אז הדרגה של מטריצה שווה למימד התמונה. Ax=0 היא מערכת משוואות הומוגנית, אז הגרעין של T הוא אוסף הפתרונות של המערכת, מימד הגרעין = מימד מרחב הפתרונות = מספר דרגות החופש.

<u>הגדרה</u>- $T: V \to V$ ט"ל, נקראת אופרטור לינארי.

<u>משפטים</u>:
- T, S שני אופרטורים לינאריים, α סקלר.
  I. $(T+S)(v)=T(v)+S(v)$
  II. $(\alpha T)(v)=\alpha T(v)$
  III. $(T\cdot S)(v)=T(S(v))=T\circ S$ (לא קומוטטיבי)
- I. $T_1(T_2+T_3)=T_1T_2+T_1T_3$
  II. $T_1(T_2\cdot T_3)=(T_1\cdot T_2)T_3$
  III. $(T_2+T_3)T_1=T_2T_1+T_3T_1$
  IV. $\alpha(T_1\cdot T_2)=(\alpha\cdot T_1)T_2=T_1(\alpha\cdot T_2)$
- $T: V \to V$ ט"ל חח"ע או על, אז קיימת T^{-1} וגם היא ט"ל.

<u>הצגה של ט"ל ע"י מטריצה</u>:
נתונה ט"ל $T: V \to V$. $B=\{v_1,v_2,\dots,v_n\}$ בסיס ל-V. יש לחשב את $T(v_1),T(v_2),\dots,T(v_n)$ ולרשות אותם בצורת צירופים לינאריים של איברי הבסיס:

$$T(v_1)=a_{11}v_1+a_{12}v_2+\dots+a_{1n}v_n$$
$$T(v_2)=a_{21}v_1+a_{22}v_2+\dots+a_{2n}v_n$$
$$\vdots$$
$$T(v_n)=a_{n1}v_1+a_{n2}v_2+\dots+a_{nn}v_n$$

קיבלנו את המטריצה: $$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

A^t תהיה המטריצה המייצגת של T לפי הבסיס B. סימון: $[T]_B$

<u>משפטים</u>:
- $T: V \to V$ ט"ל, B בסיס ל-V. $[T(v)]_B=[T]_B\cdot[v]_B$
- I. $[T+S]_f=[T]_f+[S]_f$
  II. $[\alpha T]_f=\alpha[T]_f$

III. $\left[T\cdot S\right]_f=\left[T\right]_f\cdot\left[S\right]_f$

IV. $r(T)=r\left(\left[T\right]_f\right)$

<u>החלפת בסיסים:</u>

V מ"ו, $g=\{g_1,g_2,\ldots,g_n\}$ ו- $f=\{f_1,f_2,\ldots,f_n\}$ שני בסיסים של V. אם נבטא איברים של בסיס אחד כצירופים לינאריים של הבסיס השני, באותה שיטה של מציאת המטריצה המייצגת נקבל את מטריצת המעבר מבסיס g לבסיס f (A^t).

$$\begin{aligned} f_1&=a_{11}g_1+a_{12}g_2+\ldots+a_{1n}g_n\\ f_2&=a_{21}g_1+a_{22}g_2+\ldots+a_{2n}g_n\\ &\vdots\\ f_n&=a_{n1}g_1+a_{n2}g_2+\ldots+a_{nn}g_n \end{aligned}$$

קיבלנו את המטריצה: $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n}\\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$

<u>משפט:</u>

V מ"ו, f ,g שני בסיסים, P מטריצת המעבר מ-g ל-f.

I. $P\cdot\left[v\right]_f=\left[v\right]_g$

II. P היא הפיכה $P^{-1}\cdot\left[v\right]_g=\left[v\right]_f$

III. $T: V\to V$ ט"ל $\Leftarrow$ $\left[T\right]_f=P^{-1}\cdot\left[T\right]_g P$

<u>הגדרה</u>- B ,A שתי מטריצות ריבועיות מאותו סדר נקראת דומות אם קיימת מטריצה הפיכה P כך ש $A=P^{-1}BP$ (A דומה ל-B).

<u>הגדרה</u>- סכום איברי האלכסון הראשי נקרע העקבה של המטריצה. סימון: tr(A).

<u>משפטים:</u>

- B ,A שתי מטריצות ריבועיות מאותו סדר, אז tr(AB)=tr(BA).
- שתי מטריצות ריבועיות מייצגות אותו אופרטור לינארי (בבסיסים שונים) אם"ם הן דומות.
- אם A ו-B דומות אז יש להן אותה דרגה, אתה עקבה, אותה דטרמיננטה, אותו פולינום אופייני, אותם ע"ע.

<u>הגדרה</u>- דטרמיננטה של מטריצה 2×2 : $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}\cdot a_{22}-a_{21}\cdot a_{12}$

דטרמיננטה של מטריצה 3×3 :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}\cdot\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

דטרמיננטה של מטריצה $n\times n$: $|A| = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13} - + \ldots + (-1)^{n+1}a_{1n}M_{1n}$
מינור M_{ij} - הדטרמיננטה של המטריצה המתקבלת ממחיקת השורה והעמודה של a_{ij}.

<u>כללים לחישוב דטרמיננטה:</u>

$$|A^t| = |A|$$

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

ניתן לפתח דטרמיננטה לפי כל שורה או עמודה. הסימן של a_{ij} יהי $(-1)^{i+j}$

$$|A| = (-1)^{i+1}a_{i1}M_{i1} + (-1)^{i+2}a_{i2}M_{i2} + \ldots + (-1)^{i+n}a_{in}M_{in}$$

אם אחת השורות (או העמודות) היא כולה אפסים אז הדטרמיננטה היא 0.
הדטרמיננטה של מטריצה משולשת היא מכפלת איברי האלכסון הראשי.
ניתן להוציא גורם משותף משורה (או עמודה) של דטרמיננטה, ואז מכפילים בו את הדטרמיננטה שנשארת. מסקנה: $A_{n\times n} \Leftarrow |\alpha A| = \alpha^n |A|$.
אם מחליפים שורות (או העמודות), סימן הדטרמיננטה משתנה.
אם מוסיפים לשורה (או עמודה) כפולה של שורה (או עמודה) אחרת, הדטרמיננטה לא משתנה.
אם יש שתי שורות (או העמודות) שוות או פרופורציונליות, הדטרמיננטה היא 0.
מטריצה היא הפיכה אם"ם הדטרמיננטה שלה שונה מ-0.

<u>הגדרה</u>- A מטריצה ריבועית. נגדיר מטריצה חדשה שתיקרא adj(A). האיבר ה-ij של adj(A) הוא $(-1)^{i+j}M_{ji}$.

<u>משפטים:</u>

- $A\cdot adj(A) = |A|\cdot I$
- $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\cdot adj(A)$
- $\big||A|\cdot I\big| = |A|^n \Rightarrow |adj(A)| = |A|^{n-1}$

<u>הגדרה</u>- $T: V \to V$ ט"ל (או A מטריצה ריבועית) נקראת לכסינה אם יש לה בסיס B כך ש- $[T]_B$ תהיה מטריצה אלכסונית, כלומר, שקיימת P מעל F כך ש- $P^{-1}\cdot A\cdot P =$ אלכסונית.
α נקרא ערך עצמי של T אם קיים $0 \neq v \in V$ כך ש- $T(v) = \alpha v$. V נקרא הוקטור העצמי ששייך ל-α. (למטריצות: $Av = \alpha v$).
T היא לכסינה אם יש לה בסיס שמורכב כולו מוקטורים עצמיים. (למטריצות: $A_{n\times n}$ היא לכסינה אם יש לה n וקטורים עצמיים בת"ל).

$f(\lambda)=|A-\lambda I|$ נקרא הפולינום האופייני של A. הערכים העצמיים הם השורשים שלו. אוסף הוקטורים העצמיים של הערך העצמי λ_0 בתוספת וקטור ה-0 נקרא המרחב העצמי ששייך ל- λ_0. סימון: $V_{\lambda=\lambda_0}$.

הגדרה- הריבוי האלגברי של λ הוא הריבוי של λ בפולינום האופייני. הריבוי הגיאומטרי של λ הוא מספר הוקטורים העצמיים הבת"ל ששייכים ל- λ.

משפטים:

- λ הוא ע"ע אם"ם הוא שורש של הפולינום האופייני.
- λ הוא ע"ע אם"ם $A-\lambda I$ לא הפיכה.
- $v \neq 0$ הוא ו"ע ששייך ל- λ, כלומר, $v \in V_\lambda$ אם"ם $V_\lambda = \ker(T-\lambda I)$.
- ו"ע של ע"ע שונים הם בת"ל.
- מציאת P: העמודות של P הן הוקטורים העצמיים הבת"ל שמצאנו. ואז

$$P^{-1}\cdot A\cdot P=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & 0\\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & 0 & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

כאשר הערכים העצמיים יופיעו באותו סדר כמו הוקטורים העצמיים המרכיבים את P.

- ריבוי אלגברי $\leq$ ריבוי גיאומטרי.
- T לכסינה אם"ם הריבוי האלגברי של כל ע"ע שווה לריבוי הגיאומטרי שלו.
- סכום הערכים העצמיים שווה לעכבה של המטריצה.
- מכפלת הערכים העצמיים שווה לדטרמיננטה של המטריצה.
- 0 הוא ע"ע אם"ם המטריצה לא הפיכה.
- $\frac{1}{\lambda}$ הוא ערך עצמי של A^{-1}
- ל-AB ול-BA יש אותו ערך עצמי.
- כל מטריצה מאפסת את הפולינום האופייני שלה.