סמסטר אי תשס"ה. מועד ב'
תאריך הבחינה: 04.03.2005

מבחן באלגברה לינארית 1
שם המרצה: פרופ' אלסקר סמיון
שם המתרגלים: אסף הדרי, קובי קרמניצר

יש לענות על כל השאלות. אין להשתמש בשום חומר עזר פרט למחשבונים.
משך הבחינה: 3.5 שעות.
בשאלות 1-4 יש לכתוב את התשובות הסופיות בלבד בעמוד הראשון של המחברת.
בשאלה 5 יש לכתוב את ההוכחות המלאות בדפים 2-4 של המחברת.

שאלה 1.

(11) (א) נתונה מערכת משוואות $Ax=0$ כאשר A היא מטריצה ממשית מסדר $m\times n$.
נסמן $C(A),R(A),V$ מרחב הפתרונות, $span$ של השורות ו- $span$ של העמודות בהתאמה.
אילו מהטענות הבאות נכונות (יש לסמן את כל התשובות הנכונות):

a. אם $m=n$ אזי $C(A)=R(A)$

b. $\dim R(A)+\dim V=n$

c. $\dim C(A)=\dim R(A)$

(11) (ב) יהי V מרחב של מטריצות ממשיות מסדר 2×2. תהי W_1 תת-מרחב המטריצות מהצורה $\begin{pmatrix} x & -2x \\ y & z \end{pmatrix}$ ותהי W_2 תת-מרחב המטריצות מהצורה $\begin{pmatrix} 2a & b \\ -a & c \end{pmatrix}$, כאשר $x,y,z,a,b,c\in\mathbb{R}$.
אילו מהטענות הבאות נכונות (יש לסמן את כל התשובות הנכונות):

a. קיים איזומורפיזם של V לעצמו שמעביר W_1 ל W_2

b. $W_1\oplus W_2=V$

c. $W_1+W_2=V$

שאלה 2.

(10) (א) עבור מטריצות $A_{n\times n}$, $a_{i,j}\in\mathbb{C}$
אילו מהטענות הבאות נכונות (יש לסמן את כל התשובות הנכונות):

a. $A^2=I \Leftarrow A=I$ או $A=-I$

b. קיימת A שאיננה אלכסונית כך ש: $A^2=I$ ובנוסף $tr(A)=0$

(12) (ב) יהי V מ"ו. איזה מהטענות הבאות נכונה (יש לסמן את כל התשובות הנכונות):

a. יהיו $u,v,w\in V$ וקטורים. אם כל הזוגות $\{u,v\},\{u,w\},\{v,w\}$ בת"ל אזי גם השלישיה $\{u,v,w\}$ היא בת"ל.

b. יהיו $u,v,w\in V$ וקטורים. אם $\{u,v,w\}$ בת"ל אזי $\{u+v+w,u+2v,u-w\}$ גם בת"ל.

שאלה 3.

(12) (א) יהיו A,B תתי-קבוצות של מ"ו V. איזה מהטענות הבאות נכונות (יש לסמן את כל התשובות הנכונות):

a. $span(A\cup B)=span(A)+span(B)$.

b. $span(A\cap B)=span(A)\cap span(B)$.

A-68

(10) (ב) חישבו את הדטרמינטה של המטריצה הבאה:

$$\begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_0 & x & a_2 & \dots & a_n \\ a_0 & a_1 & x & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_0 & a_1 & a_2 & \dots & x \end{bmatrix}$$

בחרו תשובה אחת בלבד:

a. $(x-a_0)(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)$ b. $a_0(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)$

c. $a_0(x^{n-1}-a_1-a_2-\dots-a_n)$

שאלה 4.

(12) (א) יהיו $A,B\in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. אילו מהטענות הבאות נכונות (יש לסמן את כל התשובות הנכונות):

a. אם A,B מטריצות אנטיסימטריות אזי AB מטריצה סימטרית

b. אם $A^TA=0$ אזי $A=0$

c. אם A מטריצה אנטיסימטרית והפיכה אזי A^{-1} גם כן אנטיסימטרית

הערה: מטריצה X נקראת סימטרית אם $X^t=X$, ואנטיסימטרית אם $X^t=-X$.

(10) (ב) פתרו מערכת משוואות ליניאריות עבור כל פרמטר λ מרוכב:

$$\begin{cases} (1+\lambda)x_1+x_2+x_3=\lambda^2+3\lambda \\ x_1+(1+\lambda)x_2+x_3=\lambda^3+3\lambda^2 \\ x_1+x_2+(1+\lambda)x_3=\lambda^4+3\lambda^3 \end{cases}$$

בחרו תשובה אחת בלבד:

a. עבור $\lambda\neq 0,-3$ $\begin{cases} x_1=2-\lambda^2 \\ x_2=2\lambda-1 \\ x_3=\lambda^3+2\lambda^2-\lambda-1 \end{cases}$, עבור $\lambda=0$ $x_1=-x_2-x_3$, עבור $\lambda=-3$ $x_1=x_2=x_3$.

b. עבור $\lambda\neq 0,-3$ $\begin{cases} x_1=2+\lambda^2 \\ x_2=2\lambda+1 \\ x_3=\lambda^3+2\lambda^2-\lambda-1 \end{cases}$, עבור $\lambda=0$ $x_1=-x_2-x_3$, עבור $\lambda=-3$ $x_1=x_2=x_3$.

c. עבור $\lambda\neq 0,-3$ $\begin{cases} x_1=2-\lambda^2 \\ x_2=2\lambda-1 \\ x_3=\lambda^3+2\lambda^2-\lambda-1 \end{cases}$, עבור $\lambda=0,-3$ $x_1=-x_2-x_3$.

שאלה 5.

(10) (א) יהי $n\in\mathbb{N}$. הוכיחו כי הפונקציות $e^x,e^{2x},\dots,e^{nx}$ הן בת"ל.

(12) (ב) תהי $A\in M_n(\mathbb{F})$. נתבונן בטרנספורמציה ליניארית $T:M_n(\mathbb{F})\to M_n(\mathbb{F})$ שמוגדרת $T(X)=AX-XA$. הוכיחו כי T חח"ע ועל.

LAVIV UNIVERSITY אוניברסיטת תל-אביב

הוראות לוובחיים ולנבחנות (נבחנו בלמוון ובר אך נוסרו לפי
לפני התחלת הבחינה מלא את כל הטרמים הבאים בכתב ברור וקריא

תאריך הבחינה 4/3/05

שם הקורס [illegible]

שם המורה [illegible]

הוראה/הסמכה [illegible]

.1 הבך בדיוק לסמוך על כם אלחיפסנו לבחינה. הכנו לחעוניק, אין לחבר ואין

נבחן חכאתו בבחינה לא מלאה/בדיה לרין מאוסמן

.2 22 על הנבחן לוובחן בחוד

.3 23 אין לחחיק מלאפונים ניד אלקטרוניים בלאמנם בכל כל הנכסים הנמצאים בכם

.4 22 אין לחחיק בהיגוב יד, ו חוסר הקשור לבחינה א בו חוחר בכתב על ידי ח

.5 22 קריאת חוספלן מחחת ר

.6 11 נבחן לא יעמוד את סקו סיים את הבחינה ללא קן מן הנחוד, יפקיד הנבחן (סוסט הבחינה) ביד ח

.7 נבחן שנכנס לחדר חבח יוא רשאי לעבוב ואת אר חרילוה ורק לאחר פני חשאלון, ויקבל סכנם ע עם כניסתו לבחינה. בבי הבחינה יחשב כמי ש

.8 אין לבחוב את חשוב הסתבדת, מרחי הנבחן הסיעוד לכך בלבד.

.9 אין לחלאר דפים מחוכו בלבד. אין לחחנשאו ב

.10 יש לבחוב את הנחשב

לשימוש המורה הבוחן:

הציון	100
המתכונת הבדקה ביום	10.03.05
חתימת המורה	[illegible]

73449

تعداد امتیاز

1) الف) b c ✓

ب) a ✓ e

22

2) الف) b ✓

ب) b ✓

22

3) الف) a ✓

ب) b ✓

22

4) الف) b e ✓

ب) a ✓

22

שאלה 1

ל) (א) $n \in \mathbb{N}$ נתון $e^{x}, e^{2x}, \dots, e^{nx}$ בת"ל

הוכחה:

אינטואיציה נגזרת בלוחות עזרה:

$$(e^{ax})' = a e^{ax}$$

כשהיא נלמדת באינדוקציה כי $\{e^{jx}\}_{j=1}^{n}$ בת"ל

אם כן, עבור $n=1$

ת"ל ש e^{x} בת"ל. נניח: $ae^{x}=0$

אזי $a \neq 0$ $\Leftarrow$ $e^{x}=\frac{0}{a}=0$ זו סתירה,

(שכן $e^{x}=e \neq 0$)

$\Leftarrow$ $a=0$ $\Leftarrow$ הדרוש הלינארי טריוויאלי.

$\Leftarrow$ $\{e^{x}\}$ בת"ל.

כאשר נניח שהוכחנו עבור n כי $\{e^{jx}\}_{j=1}^{n}$ בת"ל

ונראה עבור $\{e^{jx}\}_{j=1}^{n+1}$.

אם כן נניח כי יש לנו צירוף לינארי מתאפס

$$(*) \quad \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j e^{jx} = 0$$

כאשר λ_j לא כולם מתאפסים. (לא צריך מאז אינו שקף הפונקציות $\{e^{jx}\}$ מופרדות אבל גם לא נשנה את מהלך ההוכחה)

אם כן נגזור עפ"י כללים סטנדרטיים של גזירה

$$= \quad = \quad = \quad 0 = 0' = \left(\sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j e^{jx}\right)' = \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j (e^{jx})'$$

$(f+g)' = f' + g'$

$(cf)' = c f'$

גזירה היא פעולה לינארית:

$= \sum \lambda_j j x e^{jx}$

(לפי הנחת האינדוקציה)

לכן $\lambda_j = 0$ מתקיים

$$(**) \quad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \cdot j\, e^{jx} = 0$$

כעת נציב את המשוואה $(*)$ ב- x (נכפיל ב- x)

$$0 = 0 \cdot x = x \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e^{jx} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x e^{jx}$$

נחסר את שני המשוואות האחרונות (ע"מ)

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x e^{jx} - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \cdot j e^{jx} = 0 - 0 = 0$$

$$\sum_{j=1}^{n-1} (\lambda_j x - \lambda_j \cdot j) e^{jx} + \lambda_n x e^{nx} - \lambda_n \cdot n e^{nx} = 0$$

$$\sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j (x - j) e^{jx} = 0$$

$\Leftarrow$ לפי הנחת האינדוקציה $\{e^{jx}\}_{j=1}^{n-1}$ בת"ל

$\lambda_j (x-j) = 0 \quad \forall$ j מקיים $j \neq x$

$\Leftarrow$ $\lambda_j = 0 \quad \forall$ j מקיים $j \neq x$

לכן לפי $(*)$ נקבל שגם

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j e^{jx} = 0$$

$$\sum_{j=1}^{n-1} 0 \cdot e^{jx} + \lambda_n e^{nx} = 0$$

$$\lambda_n e^{nx} = 0$$

$\Leftarrow$ $\lambda_n \neq 0$ אם $e^{nx} = 0$ לא יתכן כי $(e^{nx} = e^{x} = e \neq 0)$

$\Leftarrow$ $\lambda_n = 0$

$\Leftarrow$ $\lambda_j = 0 \quad \forall$ j מקיים $j \neq x$

$\Leftarrow$ $\{e^{jx}\}_{j=1}^{n}$ בת"ל

■

$T(x) = Ax - xA$ $\quad T: M_n(\mathbb{F}) \to M_n(\mathbb{F}),\ A \in M_n(\mathbb{F})$ (ב 5

דג'ל: T אינו חח"ע.

הוכחה:

$T(I) = AI - IA = A - A = 0$

$\Rightarrow I \in \ker(T) \Rightarrow \ker(T) \neq \{0\}$

$\underset{\text{משפט}}{\Longrightarrow}$ אינו חח"ע T $\underset{\text{משפט}}{\Longrightarrow}$ אינו על T

T חח"ע $\Leftrightarrow \ker(T) = \{0\}$ $\qquad T: V \to W$, $\dim V = \dim W$

~~[illegible]~~ T חח"ע $\Leftrightarrow$ T על

$W = V = M_n(\mathbb{F})$ נקבל: ~~[illegible]~~

$\dim W = \dim V = \dim M_n(\mathbb{F})$:מש"ל

12/12

$\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$

$\leftarrow$ $\lambda C / \cdot C$

$a+b$

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & c \\ 0 & 1 & 0 & -1 & c \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 0 \end{array}$$

$A_{m\times n}$

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{matrix}$$

$a\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

$=c\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}+d\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

$\dim V = n-k+k=2$

$$\begin{bmatrix}1&0&-1&0\\0&1&0&-1\\0&1&-1&0\end{bmatrix} \to \begin{matrix}1&0&-1&-1\\0&1&0&-1\\0&0&-1&1\end{matrix}$$

c b ~~a~~ 1 1

$a\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}+\cancel{d\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}}=\begin{bmatrix}a\\b\\2a\end{bmatrix}$

c ~~b~~ a 2

b ~~b~~ 1 2

b ~~b~~ 2

$\begin{bmatrix}x\\y\\z+y\end{bmatrix}$

$$\begin{matrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \quad 3$$

$|A||A^{-1}|=1$

$|A|=\pm 1$

$$\begin{matrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \quad 3$$

$a=d$

$b=d$

$c=d$

$\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$

$a=c$

$A^2+tr(A)A+det(A)I=0$

$I+0\cdot A=-det(A)I$

$\det A=(-1)$

$\alpha(u+v+w)+\beta(u+2v)+\gamma(u-w)=(\alpha+\beta+\gamma)u+$

$+(\alpha+2\beta)v+(\alpha-\gamma)w=0$

$$\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&0\\1&0&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&-1\\0&-1&-2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&-1\\0&0&-3\end{bmatrix}$$

1(C)·C

1 2
0 0
a b $A \cap B = \emptyset$ span y = span

span(A∪B)

$$\underbrace{\sum \lambda_i a_i}_{sp A} + \underbrace{\sum \delta_j b_j}_{sp B} \subseteq$$

$$\supseteq \sum \lambda_i a_i + \sum \delta_j b_j$$

$$-\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_0 & x & a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & & x & & \\ a_0 & & & a_{n-1} & x \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

$$-a_1 \begin{vmatrix} a_0 & a_2 & & a_n \\ \vdots & x & & \\ & a_2 & & \\ a_0 & a_2 & & a_{n-1}\ x \end{vmatrix} + x \underbrace{\begin{vmatrix} a_0 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_0 & x & \cdots & a_n \\ \vdots & a_2 & \ddots & \\ a_0 & a_2 & a_{n-1} & x \end{vmatrix}}_{\text{אותו דבר מה שלפני}}$$

$$+ a_1 \begin{vmatrix} a_0 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_0 & a_2 & \cdots & a_n \\ & & & \end{vmatrix} +$$

1.C1.C

$(x+a_1)d_{n-1} = d_n$

$(x+a_2)\,d_{n-2} = d_{n-1}$

$d_n = (x+a_1)(x+a_2)d_{n-2} = \dots = (x+a_{n-2})d_2$

$(x-a_1)d_{n-1}$

$d_n = (x-a_{n-2})d_2 = (x-a_{n-1})(a_0 x - a_0 a_1)$

$= a_0(x-a_i)$

$(A)_{ji} = (A^t)_{ij} = (-A)_{ij}$

$A^t = -A$

$A^t = -A \qquad B^t = -B$

$(AB)^t = B^t A^t = (-B)(-A) = BA$

$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} =$

$\underbrace{(AB)_{ij}} = \sum_k (A)_{ik}(B)_{kj}$

$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \\ -3 & -4 & 0 \end{bmatrix}}_{B} = \underbrace{(AB)_{ji}} = \sum_k (A)_{jk}(B)_{ki}$

$= \sum_k (-A)_{kj}(-B)_{ik}$

$= \sum_k (-B)_{ik}(-A)_{kj}$

$= \sum_k B_{ik}A_{kj}$

$(AB)_{1,3}$

$(B\,A)_{1,3}$

$(AB)^t_{1,3} \quad (AB)^t_{1,3} \neq (AB)_{1,3}$

$$(A^T A)_{ij} = \sum_k (A^T)_{ik} (A)_{kj} = \sum_k A_{ki} (A)_{kj}$$

$$\begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

$i = j$

$$\Rightarrow \sum_k A_{ki} A_{ki} = 1$$

$$\boxed{A_{ki} = 0}$$

$$\begin{bmatrix} \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

$AA^{-1} = I$

$(A)A^{-1})$

$$(AA^{-1})_{ij} = \sum_k (A)_{ik} (A^{-1})_{kj}$$

$i = j$

$$\sum_{i \neq j} A_{ik} (A^{-1})_{ki} = 1$$

$(A \cdot A^{-1})_{ij}$

$(A \cdot A^{-1})_{ij} =$

$$(A^{-1} A)_{ij} = \sum_k (A^{-1})_{ik} (A)_{kj} \quad : \quad \sum (A^{-1})_{ik} (A)_{ki} = 1$$

$-1+3 \quad -2$

$$\begin{matrix} 1-\lambda & 1 & 1 & \lambda^2+3\lambda \\ 1 & 1+\lambda & 1 & \lambda^3+3\lambda^2 \\ 1 & 1 & 1+\lambda & \lambda^3+3\lambda^3 \end{matrix}$$

$AA^{-1} = I$

$(A^t)(A^t)^{-1} = I$

$9+3(-3 \quad -27+27 \quad 81+3(-27)$

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{matrix}$$

$(A^{-1})^t A^t = I$

$(-A)$

$$\begin{matrix} 0 & -3 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} 0 & -3 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

$x_2 = x_3 \quad 1$

$x_1 = x_3 \quad -1$

$1+3$

A

$$\left[\begin{matrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} -2 \\ 2 \\ -2 \end{matrix}\right] \to \left[\begin{matrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} -2 \\ 2 \\ -4 \end{matrix}\right] \to \left[\begin{matrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} -2 \\ 2 \\ -2 \end{matrix}\right]$$

$$\left[\begin{matrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{matrix}\right] \to \left[\begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{matrix}\right]$$

$9+3(-3)$

$-27+39=0$

$81+3(-27)=0$

$\sum \lambda_i e^x = 0$

$x_1 = 1$

$x_2 = -3$

$x_3 = 1$

$$\begin{matrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{matrix}$$

$a_1 e^x + a_2 e^{2x} + \dots + a_n e^{nx} = 0$

$a_1 e^x + 2a_2 e^{2x} + \dots + a_n n e^{nx} = 0$

$n a_1 e^x + n a_2 e^{2x} + \dots + n a_n e^{nx} = 0$

$$\begin{matrix} 0 & -3 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \end{matrix}$$

$(na_1 - a_1) e^x + \dots + (na_{n-1} - (n-1)a_{n-1}) e^{n-1x} = 0$

$n a_1 (n-1) \qquad a_{n-1}(1) e^{n-1} e$

$$\begin{matrix} 0 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

$2a e^x + 2b e^{2x} = 0$

$a e^x + 2b e^{2x} = 0$

$(a - 2a) e^x = 0$

$-a e^x = 0$

$x_2 = x_3$

$x = 2x_2 - x_3$

$= 2x_3 - x_3 = x_3$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 6 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 1 & 0 & -3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right] \to \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 0 & 1/2 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 1 & 0 & -3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1/2 & -\frac{1}{3} & -1/6 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1/2 & -1/3 & -1/6 \\ 1 & 0 & -3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/4 & 1/6 & 1/12 \end{array} \qquad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1/2 & -1/3 & -1/6 \\ 1 & 0 & 0 & 3/4 & -1/2 & 3/12 \\ 0 & 0 & 1 & 1/4 & 1/6 & 1/12 \end{array}\right]$$

$\cancel{1/2 \cdot 2 \quad 1/6 \cdot 2 \quad 1/12}$

$$\begin{pmatrix} 3/4 & -1/2 & 3/12 \\ 1/2 & -1/3 & -1/6 \\ 1/4 & 1/6 & 1/12 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad 0$$

$a^2 + bc \qquad ab + bd$

$ac + cd \qquad cb + d^2$

0

$i + d = 0$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & & & \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} i & 2 \\ 1 & -i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i & 2 \\ 1 & -i \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \to \cancel{\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & & & \end{array}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(c) (1) (4) ?

(b) (2) ?

$$\begin{bmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix}$$

$\alpha + \beta + \gamma$

$\alpha \quad 2\beta$

$\alpha \quad -\gamma$

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$$

rc C1 · C

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & & & \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 3/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & -1/2 & 0 \\ 1 & -4/3 & 0 & 0 & 0 & -1/3 \end{array}\right)$$

$$\to \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 3/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & -4/3 & 2 & 0 & 1/2 & -1/3 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 3/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & -3/2 & 0 & -3/8 & 1/4 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 3/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -1/2 & -3/8 & 1/4 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 3/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/6 & 1/8 & -1/12 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 0 & -1/4 & -3/16 & 1/8 \\ 1 & 0 & 0 & 1/3 & -1/4 & -1/6 \\ 0 & 0 & 1 & 1/6 & 1/8 & -1/12 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1/3 & -1/4 & -1/6 \\ -1/4 & -3/16 & 1/8 \\ 1/6 & 1/8 & -1/12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \\ -3 & -4 & 0 \end{bmatrix} = \underline{1}$$

$-\frac{3}{4} \cdot 2$

$-\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{3}{8}$

$+\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3}$

$-\frac{3}{4} \cdot 2 - \frac{3}{2}$

$\frac{1}{2} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{6}$ $\quad \frac{1}{2} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}$

$= \frac{3}{6} - \frac{3}{12}$ $\quad \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$ $\quad = \frac{1}{2} - \frac{3}{4}$

$-\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{8} = \frac{-3}{16}$ $\quad = -\frac{1}{4}$

$-\frac{3}{2} + \frac{1}{12}$ $\quad \frac{3}{24}$

$\frac{1}{3}$ $\quad \frac{1}{6}$ +

1

$(A)_{ij} = -(A)_{ji}$

$AA^{-1} = \underline{1}$ $\qquad (AA^{-1})_{ii} = \sum_k (A)_{ik} (A^{-1})_{ki} = \underline{1}$

$(A^{-1}A)_{ii} = \sum_k (A^{-1})_{ik} (A)_{ki} = 1$

$\sum_k (A^{-1})_{ik} \underbrace{(-(A)_{ik})}_{-(A^{-1})_{ki}} = 1$

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{matrix}$$

$\frac{3}{2} \cdot 2 = 3/2$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 3/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & -1/2 & 0 \\ 1 & 4/3 & 0 & 0 & 0 & -1/3 \end{array}\right)$$

$-\frac{1}{3} - \frac{5}{3}$

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 3/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 4/3 & 2 & 0 & 1/2 & -1/3 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 3/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 3/2 & & & \end{matrix}$$

$\frac{5}{2} + \frac{5}{2}$ $\quad \frac{\cancel{5}}{3}$ $\quad \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{3}$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & -4 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & -5 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 5/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/2 \end{matrix}$$

$\frac{4}{26}$

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & -4 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 5/2 & 4 & 0 & 1 & 0 & -1/2 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & -1/3 \\ 0 & 1 & 1\frac{1}{4} & 2 \end{matrix} \left| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & -1/4 \end{matrix} \right.$$

$$\begin{matrix} 1 & & & \\ 1 & & & \\ 1 & & & \\ 0 & 0 & 7/4 & 7/3 \end{matrix} \left| \begin{matrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ 0 & 1/6 & 1/3 & -1/4 \end{matrix} \right.$$

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & -7/3 & \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 \end{matrix} \left| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 7/4 & 21 & -1/4 \end{matrix} \right.$$

$$AB_{ij} = \sum_k A_{ik} B_{kj}$$

$$(AB)_{ji} = \sum_k A_{jk} B_{ki}$$

$$(BA)_{ji} = \sum_k B_{jk} \cdot A_{ki} = \sum_k B_{kj} A_{ik} = (AB)_{ij}$$

$$(BA)_{ji} = (AB)_{ij} = (AB) \quad \Rightarrow$$

$$(AB)_{ij} = (BA)_{ji}$$

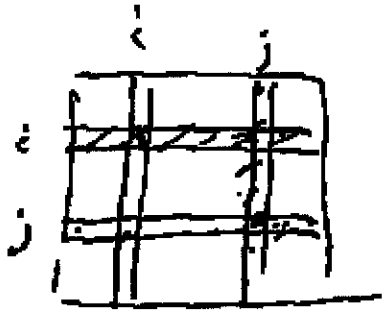
$$(AB)_{ij} = (AB)_{ji} \qquad AB = BA^t$$

$$AB = (AB)^t = B^t A^t = BA$$

$$\underbrace{AA^{-1}}_{IA^{-1}}A^{-1} = A(A^{-1})^2$$

$$\begin{matrix} 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$$



$$A\,\mathrm{adj}\,A = |A|\,I$$

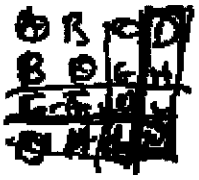
$$A^{-1} = \frac{\mathrm{adj}\,A}{|A|}$$

$$(\mathrm{adj}\,A)_{ij} = (-1)^{i+j}|M_{ji}|$$

$$(\mathrm{adj}\,A)_{ji} = (-1)^{i+j}|M_{ij}|$$

$$M_{ij} = -M_{ji}$$

	A	B	C	D
	-B	0	E	F
	-C	-E	0	G
	-D	-F	-G	0



A B D
-B 0

$(M_{ij})_i$

$(M)_{ij}$

A B C D

$\frac{c}{a} - \frac{b}{c} \cdot \frac{b}{a}$ $\quad \frac{c^2}{ac} - \frac{b^2}{ab}$

0 B C
-B 0 G
-D -H -L

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & a & b & 1 & 0 & 0 \\ -a & 0 & c & 0 & 1 & 0 \\ -b & -c & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

1 0 0
0 1

$a \neq 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & \frac{b}{a} & \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{c}{a} & 0 & \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{b}{c} & \frac{c}{a} & 0 & -\frac{1}{c} & -\frac{1}{b} \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{b}{a} & 0 & \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{c}{a} & \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{c^2-b^2}{ac} & -\frac{1}{c} & -\frac{1}{b} & -\frac{1}{b} \end{array}\right)$$

$\frac{\pi 1}{1}$ $\quad 3$ $\quad 1 = b, a$
$c = 2$

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -1 & -1 \end{matrix} \qquad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 3 & -\frac{1}{2} & -1 & -1 \end{array}\right)$$