A-67

סמסטר א' תשס"ה. מועד א'

תאריך הבחינה: 01.02.2005

מבחן באלגברה לינארית 1

שם המרצה: פרופ' אלסקר שמיון

שם המתרגלים: אסף הדרי, קובי קרמניצר

יש לענות על כל השאלות. אין להשתמש בשום חומר עזר פרט למחשבונים.

משך הבחינה: 3.5 שעות.

בשאלות 1-4 יש לכתוב את התשובות הסופיות בלבד בעמוד הראשון של המחברת.

בשאלה 5 יש לכתוב את ההוכחות המלאות בדפים 2-4 של המחברת.

שאלה 1.

(11) (א) לחשב את דרגת המטריצה עבור כל פרמטר λ ממשי:

$$A=\begin{bmatrix} 7-\lambda & -12 & 6 \\ 10 & -19-\lambda & 10 \\ 12 & -24 & 13-\lambda \end{bmatrix}.$$

בחרו אחת מהתשובות הבאות:

(a) $rkA=3$ לכל λ. (b) $rkA=\begin{cases} 3, \lambda \neq 1,5,-5 \\ 2, \lambda = 1 \\ 1, \lambda = 5,-5 \end{cases}$. (c) $rkA=\begin{cases} 3, \lambda \neq 1,5,-5 \\ 2, \lambda = 1,5,-5 \end{cases}$.

(11)(ב) לפטור את המערכת

$$\begin{cases} x_1+2x_2+\ldots+nx_n=b_1 \\ 2x_1+3x_2+\ldots(n+1)x_n=b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ nx_1+(n+1)x_2+\ldots+(2n-1)=b_n \end{cases}.$$

בחרו אחת מהתשובות הבאות:

(a) אם קיימים $2 \le i,j \le n$ כך ש- $b_i-b_{i-1} \neq b_j-b_{j-1}$ אז אין פתרון. אחרת

$$\begin{cases} x_1=(2b_2-3b_1)+\sum_{i=3}^{n}(i-2)x_i \\ x_2=(2b_1-b_2)-\sum_{i=3}^{n}(i-1)x_i \end{cases}$$

כאשר $x_3,\ldots,x_n$ מספרים כלשהם.

(b) אם קיימים $2 \le i,j \le n$ כך ש- $b_i-b_{i-1} \neq b_j-b_{j-1}$ אז אין פתרון. אחרת

$$\begin{cases} x_1=(2b_2-3b_1)-\sum_{i=3}^{n}(i-2)x_i \\ x_2=(2b_1-b_2)+\sum_{i=3}^{n}(i-1)x_i \end{cases}$$

כאשר $x_3,\ldots,x_n$ מספרים כלשהם.

(c) $x_i=ib_i-(i-1)$ לכל $1 \le i \le n$.

שאלה 2.

(11)(א) יהי U,V,W תתי-מרחבים ליטאריים של מ"ו L נוצר סופית. אילו מהטענות הבאות נכונות:

(1) $(U+V)\cap W=(U\cap W)+(V\cap W)$. (2) $(U\cap V)^*=U^*+V^*$.

בחרו אחת מהתשובות הבאות:

(a) (1). (b) (2). (c) שתיהן נכונות. (d) שתיהן לא נכונות.

(11)(ב) חישבו את הדטרמינטה:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix}$$

. בחרו את מהתשובות הבאות:

(a) -1. (b) $-a_1a_2\cdots a_n$. (c) $-a_1\cdots a_n\left(\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right)$.

(d) $-(a_1a_2+a_2a_3+\dots+a_{n-1}a_n)$.

שאלה 3.

(14)(א) יש לקבוע בכל סעיף האם קיימת טרנספורמציה T שמקיימת את הטענות (יש לסמן את כל התשובות הנכונות):

(a) $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ כך ש- $T(1,1)=(2,-2,6)$, $T(-1,1)=(1,-1,3)$.

(b) $T:\mathbb{R}^5\to M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ כך ש- $\operatorname{Im}T=M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

(c) $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^5$ כך ש- $KerT=span\{(0,1,1),(1,1,-1)\}$, $\operatorname{Im}T=span\{(0,1,1,2,0),(1,1,1,-2,1)\}$.

(8)(ב) למה שווה מימד של $\mathbb{C}^n$ כמרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$. בחרו את מהתשובות הבאות:

(a) n. (b) $2n$. (c) $4n$. (d) $\frac{n}{2}$.

שאלה 4.

(12)(א) יהי $T:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^2$ טרנספורמציה עם המטריצה $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ ביחס לבסיסים הסטנדרטיים. ותהי $R:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^4$ טרנספורמציה עם המטריצה $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \\ 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ ביחס לבסיסים הסטנדרטיים. נסמן $U=KerT, V=\operatorname{Im}R$. מצאו מימדים של $U+V$ ו- $U\cap V$.

בחרו את מהתשובות הבאות:

(a) $\dim(U\cap V)=2$, $\dim(U+V)$. (b) $\dim(U+V)=4, \dim(U\cap V)=0$.

(c) $\dim(U\cap V)=1$, $\dim(U+V)=3$. (d) $\dim(U+V)=4, \dim(U\cap V)=1$.

(10) (ב) ותהי A מטריצה $n\times n$ עם מקדמים שלמים. נניח כי A^{-1} קיימת וגם לה יש מקדמים שלמים. למה יכולה להיות שווה דטרמינטה של A? בחרו את מהתשובות הבאות:

(a) מספר שלם כלשהו. (b) 1 בלבד. (c) 1 או 1- בלבד.

שאלה 5.

(12)(א) יהיו V,W מ"ו נוצריים סופית. תהיינה $f,g:V\to W$ טייל. הוכיחו כי אם $Ker(f)\subset Ker(g)$ אזי קיימת טייל $h:W\to W$ כך ש- $g=h\circ f$.

(10)(ב) תהי $A\in M_n(\mathbb{F})$ מטריצה הפיכה. הוכיחו כי $adj(adj(adj(A)))=(\det A)^{(n-2)(n-1)}adj(A)$.

בהצלחה!!!

אוניברסיטת בן-גוריון בנגב BEN-GURION UNIVERSITY OF THE NEGEV

הוראות לנבחנים ולנבחנות (נכתבו בלשון זכר אך נוסחן לשני לפני התחלת הבחינה מלא את כל הפרטים הבאים בכתב ברור וקרא בז

תאריך הבחינה 1/2/05

שם הקורס לינארית 1

שם המורה סלין אלפר

החוג/הסמכה מתמטיקה ומקצועי המחשב

חתימת המורה

1. הנך נדרש לעמוד על סוהר ולהישמע להוראות המשגיחי להעתיק, אין לדבר ואין לה

נבחן המנהג בגיסוד להוראו ולהעמדה לדין משמעתי.

2. על הנבחן לחתום, בחדר שמ

3. אין להחזיק טלפונים סלולרי אלקטרוניים כלשהם בחזקת ת כל חפצי האישיים בצד הר

4. אין להחזיק בחישוב יד, בחדר חומר הקשור לבחינה או לק בו חותר בכתב על ידי המורה

5. קריאת השאלון מותרת רק ל

6. נבחן לא יעמוד את מקומו ו סיים את הבחינה ללא קבלת מן החדר, יפקיד הנבחן את (סומס הבחינה) בידי המשג

7. נבחן שמגיע לחדר הבחינה יהא רשאי לעמוד אותו אלא כע תחילתה ורק לאחר שיחזיר השאלון, ויקבל מסמך את הר עם כניסתו לבחינה. נבחן שר הבחינה ייחשב כמי שנבחן

8. אין לכתוב את חומר אז כ המחברת. פרטי הנבחן יש הסיעוד לך בלבד.

9. אין לחלוש דפים מהמחברת. בלבד. אין להשתמש בדפים

10. יש לכתוב את התשובות בע

לשימוש המורה הבוחן:

חציון 100

המחברת נבדקה ביום 06.02.05

חתימת המורה

75405

	10	λ
1	11	
5	12	10
210	77	

110

שאלה 2

$(U\cap V)^\circ = U^\circ + V^\circ$

א. (b) ✓ לא הטענה כנכונה 11/11

ב. (c) ✓ $a_n\left(\frac{1}{a_1}+\dots+\frac{1}{a_n}\right)$ גבול 11/11

שאלה 3

א. (a) קיומה המוגדר לא ✓ 14/14

ב. (b) $\dim C^n=2n$ נגד A ✓ 8/8

שאלה 4

א. (c) ✓ $\dim(U+V)=3$ $\dim(U\cap V)=1$ 12/12

ב. (c) ✓ $\det A=1$ אי $\det A=-1$ 10/10

שאלה 1

ב. [redacted] (a) ✓ 11/11

ג. בהמשך הרצאה:

$$\begin{pmatrix} 7-\lambda & -12 & 6 \\ 10 & -19-\lambda & 10 \\ 12 & -24 & 13-\lambda \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 7-\lambda & -12 & 6 \\ 1 & \frac{-19-\lambda}{10} & 1 \\ 1 & -2 & \frac{13-\lambda}{12} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 7-\lambda & -12 & 6 \\ 0 & 2-\frac{19+\lambda}{10} & 1-\frac{13-\lambda}{12} \\ 1 & -2 & \frac{13-\lambda}{12} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -12+2(7-\lambda) & 6-\frac{(7-\lambda)(13-\lambda)}{12} \\ 0 & \frac{1-\lambda}{10} & \frac{1+\lambda}{12} \\ 1 & -2 & \frac{13-\lambda}{12} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 6 & -12 & 6 \\ 10 & -20 & 10 \\ 12 & -24 & 12 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2(1-\lambda) & \frac{72-(7-\lambda)(13-\lambda)}{12} \\ 0 & 1-\lambda & \frac{(1+\lambda)\cdot 10}{12} \\ 1 & -2 & \frac{13-\lambda}{12} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{72-(7-\lambda)(13-\lambda)-20(1+\lambda)}{12} \\ 0 & 1-\lambda & \frac{10(1+\lambda)}{12} \\ 1 & -2 & \frac{13-\lambda}{12} \end{pmatrix}$$

Rank=2

$\lambda=1$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{-40}{12} \\ 0 & 0 & \frac{20}{12} \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda=5$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{72-2\cdot 8-20\cdot 6}{12} \left(-\frac{5}{3}\right) \\ 0 & -4 & 5 \\ 1 & -2 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 12 & -12 & 6 \\ 10 & -24 & 10 \\ 12 & -24 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -6 & 3 \\ 5 & -12 & 5 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$(n-2)n-n+2$

$$\begin{pmatrix} 1 & -6 & 3 \\ 0 & 8 & 10 \\ 0 & 12 & -8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -6 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$s=3$

10/10

שאלה 5.

$$adj(adj(adjA)) = (\det A)^{(n-1)(n-2)} \cdot adjA$$.

נשתמש בנוסחא שמוכרת:

$$A \cdot adjA = I \cdot \det A$$

$$adjA = (\det A) A^{-1}$$. בהנחה ש- A הפיכה

נחשב:

$$\begin{cases} adj(adjA) = \det(adjA)(adjA)^{-1} = \\ \det((\det A)\cdot A^{-1})\cdot((\det A)A^{-1})^{-1} = (\det A)^{n} \cdot \det(A^{-1}) \cdot \frac{1}{\det A} \cdot A = \end{cases}$$

(1) (2)

$$(\det A)^{n} \cdot \frac{1}{\det A} \cdot \frac{1}{\det A} \cdot A = (\det A)^{n-2} \cdot A$$

$$adj(adj(adjA)) = adj((\det A)^{n-2} \cdot A) = \det((\det A)^{n-2} \cdot A) \cdot ((\det A)^{n-2} \cdot A)^{-1}$$

$$((\det A)^{n-2})^{n} \cdot \det A \cdot \frac{1}{(\det A)^{n-2}} \cdot A^{-1} = (\det A)^{(n-2)n} \frac{\det A}{(\det A)^{n-2}} \cdot \frac{AdjA}{\det A} =$$

$$(\det A)^{(n-2)n-(n-2)} \cdot AdjA = (\det A)^{(n-2)(n-1)} \cdot AdjA$$ נשים לב:

הסברים:

(1) $\det(\lambda A) = \lambda^{n} \det A$ מתמטיקה לתכונות הדטרמיננטה ניתן את

מכלל. מוכר. (2) λ^{-1} מקבל כל הפרמטר

$$A^{-1} \cdot I \cdot \frac{1}{\lambda} = A^{-1}(I\lambda)^{-1} = (I\lambda A)^{-1} = (\lambda A)^{-1} \quad (2)$$

$$\begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n & b_1 \\ 2x_1 \quad 3x_2 \quad (n+1)x_n & b_2 \\ \\ nx_1 \quad (n+1)x_1 \quad 2n-1x_n \end{pmatrix} \to \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & & 1 & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & & & \\ & 0 & a_2 & 0 & & \\ 1 & 0 & 0 & a_3 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & a_{n-1} \\ & & & & & a_n \end{vmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \\ & & & \\ 1 & 2 & & n \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & -a_1 & a_1 & 0 & & 0 \\ & & -a_2 & 0 & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & a_{n-1} & 0 \\ & & & & -a_n & a_n \end{vmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & & n \\ & & & \\ & & & \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} b_1 \\ b_2 - b_1 \\ \\ b_n - b_{n-1} \end{matrix} \qquad -b_1$$

$$\text{Vicker } \mathcal{J} = 0 \qquad \begin{vmatrix} a_1 & & 0 \\ -a_2 & & \\ 0 & & \\ & & a_n \end{vmatrix} \qquad (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} -a_1 & a_1 & & 0 \\ & -a_2 & & \\ & & & \\ 0 & & a_{n-1} & \\ & & -a_n & \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ 1 & & & & \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_n \\ 1 & 0 & & \\ & & & \\ & & & \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_1 & -a_1 & & & \\ 0 & a_2 & -a_2 & & \\ 0 & & a_3 & & \\ & & & & \\ 1 & 0 & & & \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & -a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ & a_2 & -a_2 & & \\ & & a_3 & & \\ & & & & \\ & & & & \\ 1 & 0 & & & \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{n-2} & -a_{n-2} & 0 \\ 0 & a_{n-1} & -a_{n-1} \\ 0 & 0 & a_n \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a_{n-1} & -a_{n-1} \\ 0 & a_n \end{vmatrix}$$

$$(M)^{-1} \qquad -a_1 \cdot a_2 \left[\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}\right] \qquad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & a_1 & 0 \\ 1 & 0 & a_2 \end{vmatrix} = \qquad (I_\lambda)^{-1} \qquad \frac{1}{\lambda} I \qquad \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(I_\lambda \cdot A)^{-1} \qquad \frac{a_1 + a_2}{a_1 a_2} \qquad 0 + 0 + 0 - a_1 - a_2$$

$$A^{-1} \cdot I^{-1}$$

שאלה 5: 12/12

(ב) V, W מ"ו נתונים מעל F. $f: V \to W$ ו-W ת"מ של V.

לכל: אם קיים $h: W \to W$ כך שמתקיים $f \circ h = g$

נבחר בסיס $\{v_1, \dots, v_m\}$ ל-$\ker f$ כאשר $m = \dim \ker f$

אם $B_{\ker f} = \{e_1, \dots, e_m\}$ לכן נשלים אותו לבסיס של V בעזרת $\{e_1, \dots, e_m, e_{m+1}, \dots, e_n\}$

אבל $\{f(e_{m+1}), \dots, f(e_n)\}$ בסיס של $\operatorname{Im} f \subseteq W$

נשלים לבסיס של W בעזרת הוקטורים $w_1, \dots, w_m$

(כי $\dim \operatorname{Im} f = \dim W$).

נגדיר $h: W \to W$ על וקטורי הבסיס

$h(f(e_i)) = g(e_i)$ לכל $i \geq m+1$

$h(w_i) = 0$ לכל i

ניתן להגדיר אותה כך שהם אינו מגדירים על איברי הבסיס ולפי נשמר לכל קיבוע של וקטורים ב-W קיימת לפ אינדוקציה אלגוריתם וקטורי הבסיס עבורם $g(e_i)$

נגדיר לכל $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \in V$ אם

$v \in \ker f$: $h(f(v)) = h(0) = 0$ ומאחר h מגדיר g

$v \notin \ker f$: $h(f(v)) = g(v)$ כנדרש.

$\underline{(U+V)\cap W} = (U\cap W)+(V\cap W)$

$x \in y$

$x = a+b$

$a \in U \quad b \in V$

$a+b \in W$

$a \in W \quad V \in W$

$W = \mathrm{Span}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

$U = \mathrm{Span}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

$V = \mathrm{Span}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

$U\cap W = 0$

$V\cap W = 0$

$\dim \ker T = 2$

R^2

$\begin{pmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$

$T(1,1) = T\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = (-1, 3)$

$T(0,2) = T(3,-3,9)$

$T(0,1) = \left(\frac{3}{2}\ -\frac{3}{2}\ \frac{9}{2}\right)$

$T(1,1) - T(0,1) = T(1,0) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$

$\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{3}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2}\\ -\frac{3}{2} & \frac{9}{2}\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}-1 & 1\\1 & -1\\-3 & 3\end{pmatrix}$

$\dim \mathrm{Im}\, T = 1$

$\begin{pmatrix}0 & 0\\1 & -1\\-3 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$

שאלה 1

א. פרמטר λ הפשט המטריצה:

$$A=\begin{pmatrix} 7-\lambda & -12 & 6 \\ 10 & -19-\lambda & 10 \\ 12 & -24 & 13-\lambda \end{pmatrix}$$

מצא את Rank A עבור λ

$$\xrightarrow{R_3\cdot\frac{1}{12}} \begin{pmatrix} 7-\lambda & -12 & 6 \\ 10 & -19-\lambda & 10 \\ 1 & -2 & \frac{13-\lambda}{12} \end{pmatrix} \xrightarrow[R_2-10R_3]{R_1-(7-\lambda)R_3} \begin{pmatrix} 0 & 2(7-\lambda)-12 & 6-\frac{(7-\lambda)(13-\lambda)}{12} \\ 0 & 1-\lambda & 10-\frac{5}{6}(13-\lambda) \\ 1 & -2 & \frac{13-\lambda}{12} \end{pmatrix}$$

$$** \begin{pmatrix} 0 & 2(1-\lambda) & \frac{72-(7-\lambda)(13-\lambda)}{12} \\ 0 & 1-\lambda & \frac{60-5(13-\lambda)}{6} \\ 1 & -2 & \frac{13-\lambda}{12} \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{חוצה ל-2 ונכפיל ב-}\frac{1}{2}]{R_1-2R_2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{-168+(13-\lambda)(13+\lambda)}{12} \\ 0 & 1-\lambda & \frac{120-10(13-\lambda)}{12} \\ 1 & -2 & \frac{13-\lambda}{12} \end{pmatrix}$$

נניח $\lambda\neq 1$ ונחלק R_2 ב $1-\lambda$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -168+\overbrace{(13-\lambda)(13+\lambda)}^{13^2-\lambda^2} \\ 0 & 1 & \frac{-10(1-\lambda)}{12(1-\lambda)} \\ 1 & -2 & \frac{13-\lambda}{12} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1-\lambda^2 \\ 0 & 1 & \frac{-5}{6} \\ 1 & -2 & \frac{13-\lambda}{12} \end{pmatrix} *$$

נניח $\lambda\neq -1$ נכפיל בביטוי 1 ונחלק ב $1-\lambda^2$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{-5}{6} \\ 1 & -2 & \frac{13-\lambda}{12} \end{pmatrix} \to \text{בסיס} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

11/11

1) $\lambda\neq 1,-1$ בסיס — $\underline{\text{Rank}A=3}$

2) $\lambda=1$ נציב ב *

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-5}{6} \\ 1 & -2 & \frac{13}{12} \end{pmatrix} \text{בסיס}$$

$\underline{\text{Rank}A=2}$

3) $\lambda=-1$ נציב ב **

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$\underline{\text{Rank}A=1}$

1.6.16

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \dim\ker = 2$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \left(a, \frac{-3a-b}{2}, a, b\right)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad a\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$T: R^4 \to R^2 \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad U = \ker T$

$R: R^2 \to R^4 \quad [\quad] \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \\ 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \qquad V = \operatorname{Im} R$

$$U \cap V = \operatorname{span}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -\frac{3}{2} & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & \frac{3}{2} \\ -1 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 4 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 8 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\dim V = 2$

$\dim U + V = 3$

$\dim V = 2$

$\dim U = 2$

$\dim U + V = 1$

$3 = 2 + 2 - \dim U \cap V$

K61·6

$T: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ $U = \ker T$

$R: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$

$\begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ $V = \operatorname{Im} R$

$\dim V = 2$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$ $\left(a \ \frac{3a+b}{-2}, a, b\right)$

$a\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$U + V = \operatorname{span}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 6 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\det A = 3$ $\det A^{-1} = \frac{1}{3}$

$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\det(A) \cdot \det(A^{-1}) = \det(I) = 1$ $\dim U + V = 3$

$3 = 2 + 2 - 1$

$\forall k$ $\ker f \subseteq \ker g$ $g = h(fv)$ $fv = 0$

: K 6'6

$$\operatorname{adj}(\operatorname{adj}(\operatorname{adj}(A))) = (\det A)^{(n-2)(n-1)} \cdot \operatorname{adj} A$$

$$\operatorname{adj} A \cdot A = I \cdot \det A$$

$$\operatorname{adj} A = \det A \cdot A^{-1}$$

$$\operatorname{adj}(\operatorname{adj}(\operatorname{adj}(A))) = \det(\operatorname{adj}(\operatorname{adj} A)) \cdot (\operatorname{adj}(\operatorname{adj} A))^{-1} =$$

$$\operatorname{adj} A = A^{-1} \cdot \det A$$

$$\operatorname{adj}(\operatorname{adj} A) = \operatorname{adj} A \cdot \det(A^{-1} \cdot \det A) =$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & & n & b_1 \\ 2 & 3 & & n+1 & b_2 \\ & & & & \vdots \\ n & & & 2n-1 & \end{array}\right) \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & & n-1 & b_2-b_2 \\ 1 & 1 & & 1 & b_2-b_1 \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & & n & b_1 \\ 1 & 2 & & 1 & b_2-b_1 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & 2 & & 1 & b_{n-1}-b_{n-2} \\ 1 & 2 & & 1 & b_n-b_{n-1} \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} -x_3 \; -2x_4 \\ \\ \\ x_2 = 2b_1 - b_2 \\ x_1 = b_2 - b_1 - \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2b_1-b_2 \\ 1 & 1 & b_2-b_1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & & n & b_1 \\ 1 & & & & b_2-b_1 \\ & & & & (b_3-b_2)(b_2-b_1) \\ & & & & \\ 0 & 0 & & 0 & (b_n-b_{n-1})-(b_{n-1}-b_{n-2}) \end{array}\right)$$

16/16

$\ker f \leq \ker g$

$g = h(fv)$

$fv \in \ker g \to 0$

$v \in \ker f$ v

$\operatorname{Im} f$

$f \cdot v = 0$

$\ker h = \ker g$ e_1 e_k

$b \cdot v$

$\ker f = v_1$ $v_k \to$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & & b_1 \\ 1 & 1 & 1 & b_2 - b_1 \end{pmatrix}$ v remain vars

$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & n-1 & b_1 - b_2 + b_1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & b_2 - b_1 \end{pmatrix}$ $v_k, \quad v_n$

$fv_{k+1} \cdot fv_n$ $\ker f$ w_1 w_m

$h\, fv_i = g \cdot v_i$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & & n & b_1 \\ & & & & \\ n & & & & b_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & & n \\ 1 & 1 & & 1 \\ & & & \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} b_n - b_{n-1}$

$\begin{pmatrix} & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} b_n - b_{n-1} - b_{n-1} + b_{n-2} = b_n - 2b_{n-1} + b_{n-2}$

$2b_1 - b_2 - b_3 - 2b_4 \; -(n-1)\, b_n$