מבחן באלגברה לינארית 1

מרצה: דר' סמיון אלסוקר

מתרגלים: ניר לב, אסף שכון

סמסטר א, מועד א, תשס"ד

תאריך הבחינה: 12.03.04

מספר הקורס: 366-1111

משך הבחינה: $3\frac{1}{2}$ שעות

אין להשתמש בחומר עזר כלשהו. ברק למחשבון.

יש לענות על כל השאלות.

סך כל הנקודות במבחן הוא 110.

שאלה 1.

(11) (א) מצאו את כל הפתרונות המרוכבים של המערכת:

$$\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3=a \\ x_1+x_2+x_3=b \\ 3x_1+x_2+x_3=c \end{cases}$$

כאשר $a,b,c\in\mathbb{C}$.

(11) (ב) מצאו את כל הוקטורים $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\in\mathbb{R}^3$ שהם צירוף לינארי של $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$.

שאלה 2.

(11) (א) אם $\{v_1,v_2,v_3\}\subset V$ קבוצה בת"ל אז $\{u_1+u_2,\ u_2-u_3,\ u_1+u_2+2u_3\}$ גם בת"ל.

(11) (ב) תהי $A\in M_{n\times n}(F)$, $\operatorname{char}F\neq 3$, המקיימת $A^3-5A-9I=0$.

הוכיחו כי A הפיכה ומצאו ביטוי למטריצה ההופכית שלה.

שאלה 3.

(11) (א) יהי V מרחב לינארי מימד סופי מעל $\mathbb{C}$. תהי $S:V\to V$ טרנספורמציה לינארית המקיימת $S^2=2S$. הוכיחו כי $V=\operatorname{Ker}S\oplus\operatorname{Im}S$.

$[S][S]\bar{v}=2[S]\bar{v}$

$[S]\bar{w}=2\bar{w}=\bar{0}$

פיר ה

יהי $[S]\bar{v}=\bar{w}$

$[S]\bar{w}=\bar{0}$

כאן $\ker S\cap\operatorname{Im}S=\{\bar{0}\}$

A-64

(מ) יהי $S = \text{span}\{(1,2,0,1),(1,1,1,0)\} \subseteq \mathbb{R}^4$

$T = \text{span}\{(1,0,1,0),(1,3,0,1)\} \subset \mathbb{R}^4$.

מצאו בסיס ל- $(S \cap T)$ ו- $(T+S)$.

---

(4)

(ב) (א) יהי $L \subset \mathbb{R}[x]_n$ תת-מרחב לינארי של מרחב הפולינומים המתוקים מדרגה אי-זוגית. נניח כי L מכיל לפחות פולינום אחד מדרגה k בעבור כל $k=0,1,\dots,n$. הוכיחו כי $L=\mathbb{R}[x]_n$.

(ב) הוכיחו כי

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 5 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & & \ddots & 2 \\ 0 & 0 & & \cdots & 2 & 5 \end{vmatrix} = \frac{1}{3}\left(4^{n+1}-1\right).$$

---

(5)

(ב) (א) מטריצה A נקראת סימטרית אם $A^t=A$, ו- A נקראת אנטי-סימטרית אם $A^t=-A$. הוכיחו כי המרחב $M_n(F)$, $\text{char}F \neq 2$, הוא סכום ישר של תת-מרחבים של מטריצות סימטריות ואנטי-סימטריות.

(ב) תהי $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ המקיימת $tr(AA^t)=0$. הוכיחו כי $A=0$.

בהצלחה!

אוניברסיטת תל-אביב

לפני התחלת הבחינה מלא את וקרא בעיון

תאריך הבחינה 12/3/04

שם הקורס אלגברה לינארית 1

שם המורה סמיון אלסקר

החוג/הס' מתמטיקה

037165925

הוראות

1. על הנבחן להיבחן רק בחדר שבו הוא רשום.
2. עם הכניסה לחדר הבחינה יש להניח את החפצים בבד לרבות מכשירי קשר ואמצעי תקשורת אחרים כשהם כבוים.
3. אסור לחתיק בהישג יד, בחדר הבחינה או בסמוך לו, כל חומר הקשור לבחינה/לקורס פרט לחומר שהשימוש בו הותר בכתב על ידי המורה.
4. יש למלא את הפרטים על מחברת הבחינה במקום המיועד לכך בלבד. אין לכתוב את השם או כל פרט מזהה אחר בתוך המחברת.
5. יש להישמע להוראות המשגיח. נבחן לא יעזוב את מקומו ללא קבלת רשות המשגיח. הפונה בשאלה או בבקשה ירים את ידו.

לשימוש המורה הנבחן:

הציון	100
המחברת נבדקה ביום	28.03.04
חתימת המורה	Alsker

שאלה מס' 1:

אן 9/11

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = a \\ x_1 + x_2 + x_3 = b \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = c \end{cases} \qquad a, b, c \in \mathbb{C}$$

מטריצה המקדמים המורחבת למערכת זו היא:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 & b \\ 3 & 1 & 1 & c \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \leftarrow R_3 - 3R_2]{R_1 \leftarrow R_1 - 2R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & -1 & a-2b \\ 1 & 1 & 1 & b \\ 0 & -2 & -2 & c-3b \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_3 \leftarrow R_3 - 2R_1]{R_2 \leftarrow R_2 + R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & -1 & a-2b \\ 1 & 0 & 0 & \cancel{2a-3b} \\ 0 & 0 & 0 & c+b-2a \end{array}\right)$$

טעות חישוב

-2

$$\xrightarrow{R_1 \leftarrow R_1 \cdot (-1)} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 2b-a \\ 1 & 0 & 0 & 2a-3b \\ 0 & 0 & 0 & c+b-2a \end{array}\right)$$

מכאן כל המקרים בהם $c+b-2a \neq 0$ למערכת אין פתרונות. כלומר למע' יש פתרונות אם $c \neq b+2a$

הפתרונות: $x_3 = t$ $\quad x_2 = 2b-a-t$ $\quad x_1 = 2a-3b$

$a = k + k'i \quad b = j + j'i \quad t = y + y'i$

בשביל מה כך?

$x_1 = (2k-3j) + (2k'-3j')i$

$x_2 = (2j-k-y) + (2j'-k'-y')i$

$x_3 = y + y'i$

$y + y'i + (-j+2k) + (-j'+2k')i$

שאלה מס' 1 מתוך 5

יש לבדוק אם כל הוקטורים שרים בתחום לינארי של

11/4

$$\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$$

המשימה נבדקת אם שמונת הוקטורים בכל (מ"ז) הבדיקה משורות כמטריצה נבדקת בדומה אמת השורות שמתקבלת בדירוג

$$\begin{pmatrix}1&3&1\\-1&0&2\\1&1&-1\end{pmatrix}\xrightarrow[R_3\leftarrow R_3-R_1]{R_2\leftarrow R_2+R_1}$$

$$\begin{pmatrix}1&3&1\\0&3&3\\0&-2&-2\end{pmatrix}\xrightarrow[R_2\leftarrow R_2\cdot(-\frac{1}{2})]{R_3\leftarrow R_3\cdot\frac{1}{3}}\begin{pmatrix}1&3&1\\0&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow[R_3\leftarrow R_3-R_2]{R_1\leftarrow R_1-3R_2}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

משמאל שנוצרה שורת אפסים נובע כי אפשר לבטא את הוקטור $\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ כצירוף לינארי של שני הוקטורים הראשונים וזאת:

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}+\left(-\frac{2}{3}\right)\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$$

לכן כל הוקטורים $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ שרים בתחום לינארי של שמונת הוקטורים הנ"ל שייכים ל:

$$\mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}\right\}$$

כלומר מתקבלת:

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a-b\\3a\\a+2b\end{pmatrix}$$

שאלה ב סעיף א'

נתון: V ו $\{v_1, v_2, v_3\}$ בת"ל. צ"ל:

$\{v_1+v_2,\ v_2-v_3,\ v_1+v_2+2v_3\}$ בת"ל

נניח כי:

$$\lambda_1(v_1+v_2)+\lambda_2(v_2-v_3)+\lambda_3(v_1+v_2+2v_3)=0$$

צריך להוכיח כי מכאן נובע $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$

$$\lambda_1(v_1+v_2)+\lambda_2(v_2-v_3)+\lambda_3(v_1+v_2+2v_3)=$$

$$(\lambda_1+\lambda_3)v_1+(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)v_2+(-\lambda_2+2\lambda_3)v_3=0$$

משפט: שנתון כי $\{v_1, v_2, v_3\}$ בת"ל נובע כי המקדמים בשוויון לא מתאפסים, ומתקבלת שרשרת השוויונות הבאה:

$$\begin{cases}\lambda_1+\lambda_3=0\\ \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0\\ -\lambda_2+2\lambda_3=0\end{cases}$$

* נראה כי לגס"ל לא יתכן פתרון נוסף לבד מ $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$

שורות המקדמים בהתאמה לגס"ל:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&0\\1&1&1&0\\0&-1&2&0\end{array}\right)\xrightarrow{R_2\leftarrow R_2-R_1}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&0\\0&1&0&0\\0&-1&2&0\end{array}\right)\xrightarrow{R_3\leftarrow R_3+R_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&2&0\end{array}\right)\xrightarrow{R_3\leftarrow R_3\cdot\frac{1}{2}}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{array}\right)\xrightarrow{R_1\leftarrow R_1-R_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{array}\right)$$

לכן $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$

הש"ל

$\frac{11}{11}$

שאלה ב סעיף ג':

נתון: $A^3-5A-9I=0$

צ"ל: A הפיכה.

כמו כן יש למצוא ביטוי למטריצה ההופכית שלה

$$\cancel{A(A^2}\quad A^3-5A-9I=0$$

כדי להסביר מדוע קיים הופכי ל- 9 בשקף

$$A^3-5A=9I$$

$$A(A^2-5I)=9I$$

$$\frac{1}{9}A\cdot(A^2-5I)=I$$

$$A\left(\frac{1}{9}A^2-\frac{5}{9}I\right)=I$$

נגדיר:

$$\frac{1}{9}A^2-\frac{5}{9}I=X$$

$$A\cdot X=I$$

לפי משפט שהוכח בכיתה יתר A הפיכה בימין אזי היא הפיכה משמאל ולכן A הפיכה.

$$AX=XA=I$$

מכאן שנובע כי X היא המטריצה ההופכית ל- A

$$A^{-1}=\frac{1}{9}A^2-\frac{5}{9}I$$

$\frac{9}{11}$

11/11

שאלה 2 סעיף ג'

$V \to V : S$, $S^2 = 2S$

צ"ל $V = \ker(S) \oplus Im(S)$

ראשית נראה כי $\ker(S) \cap Im(S) = 0$

~~[illegible]~~ יהי $v \in \ker(S) \cap Im(S)$

מכיוון ש- $v \in Im(S)$ אזי קיים $u \in V$ כך ש:

$v = S(u)$.

מכיוון ש- $v \in \ker(S)$ אזי $S(v) = 0$

מכיוון שנתון $S^2 = 2S$ $\{$ $0 = S(v) = S^2(u) = 2 \cdot S(u)$

ולכן: $2S(u) = 2 \cdot v = 0$

ולכן v קבוע - וקבוע האפס.

עכשיו נשים לב שמתקיים: $\dim V = \dim Im(S) + \dim \ker(S)$

ולכן נשאר שנוכיח שמימד הגרעין הוא 0,

עכשיו נשים לב המימדים נכונים כי $V = \ker(S) \oplus Im(S)$

תרגיל 3 מטלה ב:

9/11

$S = span\{(1,2,0,1),(1,1,1,0)\}$

$T = span\{(1,0,1,0),(1,3,0,1)\}$

הראשית נמצא את $S \cap T$

$$\lambda_1\begin{pmatrix}1\\2\\0\\1\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}=\lambda_3\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}+\lambda_4\begin{pmatrix}1\\3\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\lambda_1\begin{pmatrix}1\\2\\0\\1\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}-\lambda_3\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}-\lambda_4\begin{pmatrix}1\\3\\0\\1\end{pmatrix}=0$$

מערכת המשוואות היא: (סלנים!!)

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&-1&-1&0\\2&1&0&3&0\\0&1&-1&-0&0\\1&0&0&1&0\end{array}\right)\quad \begin{array}{l}R_1\leftarrow R_1-R_4\\R_2\leftarrow R_2-2R_4\end{array}$$

-2

$$\left(\begin{array}{cccc|c}0&1&1&0&0\\0&1&0&1&0\\0&1&1&0&0\\1&0&0&1&0\end{array}\right)\quad R_3\leftarrow R_3-R_1$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c}0&1&1&0&0\\0&1&0&1&0\\0&0&0&0&0\\1&0&0&1&0\end{array}\right)\xrightarrow{R_1\leftarrow R_1-R_2}\left(\begin{array}{cccc|c}0&0&1&-1&0\\0&1&0&1&0\\0&0&0&0&0\\1&0&0&1&0\end{array}\right)$$

$\lambda_4=t \quad \lambda_3=t \quad \lambda_2=-t \quad \lambda_1=-t$

ולכן הבסיס ל $S \cap T$ הוא:

$span\{(-1,-1,1,1)\}$

כעת נמצא את $S+T$: נעבור מערכת ל וקטורים

הקודמת:

$$\begin{pmatrix}1&2&0&1\\1&1&1&0\\1&0&1&0\\1&3&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2\leftarrow R_2-R_3}\begin{pmatrix}1&2&0&1\\0&1&0&0\\1&0&1&0\\1&3&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[R_4\leftarrow R_4-3R_2]{R_1\leftarrow R_1-2R_2}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&0\\1&0&1&0\\1&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_4\leftarrow R_4-R_1}\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3\leftarrow R_3-R_1}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

המשך בעמ' הבא

אם: $T+S = \mathrm{span}\{(1,0,0,1),(0,1,0,0),(0,0,1,-1)\}$

מספר נקודות 1.5

תרי 4 סעיף א': 11/11

$L \subset \mathbb{R}[x]_n$ תת מרחב של פולינומים שמדרגתם קטנה שווה מ-n. נתון כי L מכיל לפחות פולינום אחד מכל דרגה בין 0 ל-n. צ"ל $L = \mathbb{R}[x]_n$

נניח פולינום אחד מכל דרגה בין 0 ל-n (אנו יכולים לסמן אותו p_i הנתון).

נטפיל לנוחות כי הפולינומים שמתרנו כלפי חלוקת לינארית נלקח נשמשו כבר לנו כסיס ל-L נכון כי הם פורשים את $\mathbb{R}[x]_n$.

ראשית נוכיח כי הפולינומים בת"ל: צ"ל

$\lambda_0 p_0 + \lambda_1 p_1 + \dots + \lambda_n p_n = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$

הוכחה באינדוקציה: ($\deg p_0 = 0, \deg p_1 = 1, \dots, \deg p_n = n$).

בסיס: $n=0$: הפולינום הוא קבוע, לכן $\lambda_0 = 0$

צעד האינדוקציה: נניח את נכונות הטענה לגבי n ונוכיח לגבי n+1.

$\lambda_0 p_0 + \lambda_1 p_1 + \dots + \lambda_n p_n + \lambda_{n+1} p_{n+1} = 0$

* מכיוון ש: p_{n+1} מכיל את האיבר x^{n+1}, שלא מופיע בשום אחד מהפולינומים האחרים (בגלל שהוא לא הוא אפס כי דרגת הפולינום גדולה מ n) אנו $\lambda_{n+1} = 0$.

$$\underbrace{\lambda_0 p_0 + \lambda_1 p_1 + \dots + \lambda_n p_n}_{0 \text{ לפי הנחת האינדוקציה.}} + \underbrace{\lambda_{n+1} p_{n+1}}_{0 \text{ לפי } *} = 0$$

לכן $p_0, p_1, \dots, p_n$ בת"ל.

כעת נותר להוכיח כי הם פורשים את $\mathbb{R}[x]_n$

יהי $Q \in \mathbb{R}[x]_n$ ברור לחלוטין כי ניתן לכתוב את Q כצירוף לינארי $p_0, p_1, \dots, p_n$

המשך בעמ' הבא

$Q = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_k x^k \quad k \le n$

$a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$

עבור כל פולינום הצורה $p_0, \dots, p_n$ נגדיר

$p_i = b_{0i} + b_{1i} x + \dots + b_{ii} x^i$

כאשר נבחר את b_{ji} הצורך לבטלות $a_i x^i$ בפולינום Q לכל j בתנאי $p_1, \dots, p_i$

$a_i x^i = \frac{1}{b_{ii}} \cdot a_i \cdot p_i$

$p_0 = b_{00}$

$p_1 = b_{01} + b_{11} x$

$p_2 = b_{02} + b_{12} x + b_{22} x^2$

$\vdots$

$p_n = b_{0n} + b_{1n} x + \dots + b_{nn} x^n$

כאשר הראינו כי אחרי הוצאת $a_i x^i$ הצורך לבטל בעזרת p_i.

$Q = a_0 + \dots + a_i x^i - a_i \cdot \frac{1}{b_{ii}} \cdot b_{0i} \cdot p_0 - \dots - a_i \cdot \frac{1}{b_{ii}} \cdot b_{ii} \cdot p_i$

הראינו כי אפשר לכתוב כל פולינום Q כצירוף לינארי של $p_0, \dots, p_n$ בדרגה (לפחות) n

$Q \in \mathbb{R}[x]$ $(1, x, x^2, \dots, x^n)$

$e_0 = 1 = 1 \cdot p_0$

$e_1 = x$

מילון

נגדיר בסיס לפולינומים:

נגדיר:

$$p_0 = b_{00}$$
$$p_1 = b_{01} + b_{11}x$$
$$p_2 = b_{02} + b_{12}x + b_{22}x^2$$
$$\vdots$$
$$p_n = b_{0n} + b_{1n}x + b_{2n}x^2 + \dots\dots + b_{nn}x^n$$

כפי שראינו כי באינדוקציה בדיוק לשאר G $p_1,\dots,p_n$ ניתן לבנות את G אותה מאותו הבסיס המונוגנרי. (הבסיס המונוגנרי $(1, x, x^2, \dots, x^n)$).

$$e_0 = 1 = \frac{1}{b_{00}} \cdot p_0$$

$$e_1 = x = (p_1 - e_0 \cdot b_{01}) \cdot \frac{1}{b_{11}}$$

$$e_2 = x^2 = (p_2 - e_0 \cdot b_{02} - e_1 \cdot b_{12}) \cdot \frac{1}{b_{22}}$$

$$\vdots$$

$$e_n = x^n = (p_n - e_0 b_{0n} - e_1 b_{1n} - \dots - e_{n-1} b_{n-1,n}) \cdot \frac{1}{b_{nn}}$$

המטרה לא e_i לפי e_{i+1}. הוא תוקן משום משום שלפני הרישומים e_i רבו קבלו את e_{i+1} בדומה שהוא רבים $p_1,\dots,p_n$.
הכפלה ב $\frac{1}{b_{ii}}$ היתה תוקנה משום שבפונקציות p_i המקדם $b_{ii} \neq 0$ (כי ק"ל לפחות פולינום אחד מ G מדרגה i ומעלה בדרגה). כפי i מדרגה G

$Q \in \mathbb{R}[x]_n$ ניתן לבנות בדיוק לשאר G ונקודות בבסיס $e_0,\dots,e_n$. בנית $q_0,\dots,q_n \in \mathbb{R}$, $k \le n$

$$Q(x) = q_0 + q_1 x + \dots + q_k x^k = q_0 \cdot e_0 + q_1 e_1 + \dots + q_k e_k =$$

$$= q_0\left(\frac{1}{b_{00}} p_0\right) + q_1 \underbrace{\left[\left(p_1 - \frac{1}{b_{00}} p_0 \cdot b_{01}\right) \frac{1}{b_{11}}\right]}_{e_1} + \dots\dots$$

$$+ q_k\left(p_k - e_0 b_{0k} - e_1 b_{1k} - \dots - e_{k-1} b_{k-1,k}\right)$$

כלומר ניתן לבנות G $Q(x) \in \mathbb{R}[x]_n$ בדיוק לשאר G $p_1,\dots,p_n$.

מכיוון ש L תת מרחב לינארי הוא סגור לחיבור
ולכפל בסקלר. הראינו כי ניתן לקבל כל
פולינום $Q(x) \in \mathbb{R}[x]_n$ הוא כצירוף של כפל חיבור
בסקלר באברי הבסיס הסטנדרטי $p_1, \dots, p_n$ ולכן
$L = \mathbb{R}[x]_n$

המשך בהתכרות עמ' 2

1	2	3	4	5	6
0	1	3	6	10	15

$$A^3 - 5A = 9I$$

$$A(A^2 - 5I) = 9I$$

$$\begin{matrix} 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & 0 & \cdot & \cdot \\ & & & & 0 & \cdot \\ & & & & & 0 \end{matrix}$$

$$A^3 - 5A - 9I = 0$$

$$A^3 = 5A + 9I$$

$$S^2(u) = 2S(v) = 0$$

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{matrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} \frac{1}{3} & & +\frac{2}{3} \\ 1 & -\frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & & -\frac{4}{3} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 5 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 5 & 2 \end{matrix}$$

$$(c - 3b) - 2(a - 2b)$$

$$c - 3b - 2a + 4b$$

$$c + b - 2a$$

$$\left\lfloor \frac{n^2 - n}{2} \right\rfloor$$

$$S^2 = 2S$$

$$S(S(v)) = 2 \cdot S(v)$$

$$v \in \ker(S) \cap \operatorname{Im}(S)$$

$$\cancel{\exists u.\ S(u) = v}$$

$$a_i x^i$$

p.

2

אוניברסיטת תל-אביב

לפני התחלת הבחינה מלא את
וקרא בעיון

תאריך הבחינה 12/3/04

שם הקורס אלגברה לינארית 1

שם המורה סנדר אלפרד

החוג/המגמה לימודי נקה

על הנבחן להיבחן רק בחדר שבו הוא רשום.

עם הכניסה לחדר הבחינה יש להניח את החפצים בצד לרבות מכשירי קשר ואמצעי תקשורת אחרים כשהם כבויים.

אסור להחזיק בהישג יד, בחדר הבחינה או בסמוך לו, כל חומר הקשור לבחינה/לקורס פרט לחומר שהשימוש בו הותר בכתב על ידי המורה.

יש למלא את הפרטים על מחברת הבחינה במקום המיועד לכך בלבד. אין לכתוב את השם או כל פרט מזהה אחר בתוך המחברת.

יש להישמע להוראות המשגיח. נבחן לא יעזוב את מקומו ללא קבלת רשות המשגיח. הפונה בשאלה או בבקשה ירים את יד.

חתימת המורה הבוחן:

חתימה:

תרגיל 4 מטלה מס':

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 5 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & \ddots & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots 2 & 5 \end{vmatrix} = \frac{1}{3}\left(4^{n+1}-1\right)$$

הוכחה באינדוקציה:

בסיס: $n=1$

$$|5| = \frac{1}{3}\left(4^2-1\right) = 5$$

$n=2$

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = \frac{1}{3}\left(4^3-1\right) = 21$$

צעד באינדוקציה: נניח עבור $n-1$ ונוכיח עבור n

פיתוח לפי שורה ראשונה:

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 5 & 2 & 0 & & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & & \ddots & 2 \\ 0 & 0 & \cdots & & 2 & 5 \end{vmatrix}_{n\times n} =$$

$$= 5\begin{vmatrix} 5 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 5 & 2 & & 0 \\ 0 & 2 & 5 & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & 2 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 5 \end{vmatrix}_{n-1\times n-1} - 2\begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 5 & 2 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 5 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & 2 \\ 0 & \cdots & & 2 & 5 \end{vmatrix}_{n}$$

פיתוח לפי שורה ראשונה

$$= 5\cdot\frac{1}{3}\left(4^n-1\right) - 2\cdot 2\begin{vmatrix} 5 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 5 & 2 & & \vdots \\ 0 & 2 & 5 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & 2 \\ 0 & \cdots & & 2 & 5 \end{vmatrix}_{n-2\times n-2} =$$

לפי הנחת האינדוקציה.

$$= 5\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(4^n-1\right) - 4\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(4^{n-1}-1\right) =$$

$$= 5\cdot\frac{1}{3}\left(4^n-1\right) - \frac{1}{3}\cdot\left(4^n-1\right) = 4\cdot\frac{1}{3}\left(4^n-1\right) =$$

$$= 4^{n+1}-1$$

$\frac{11}{11}$

מצ"ל

תרגיל מעל א':

11/11

$\cancel{V=\{A\}}$

$$V=\{A\in M_n\mathbb{F} \mid A^t=A\}$$
$$U=\{A\in M_n\mathbb{F} \mid A^t=-A\}$$

נ.ל. $M_n\mathbb{F}=U+V$

ראשית נראה כי $U\cap V=0$

נניח $A\in U\cap V$

אזי $A=-A \Rightarrow A^t=-A$, $A=A^t$

ולכן $A=0$.

כפי שמסיק לתרגיל כי $\dim U+\dim V=\dim M_n(\mathbb{F})$

$*$ $\dim M_n(\mathbb{F})=n^2$

$**$ $\dim U=\frac{n^2-n}{2}$

$***$ $\dim V=\frac{n^2-n}{2}+n$

$*$ הסבר: $n^2=\dim M_n(\mathbb{F})$ שכן הבסיס הסטנדרטי:

$$\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\ \vdots&&0&\\ \vdots&&&0\\ 0&\cdots&\cdots&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&1&0&\cdots&0\\ &&&&\\ &&&&\\ 0&&&&0\end{pmatrix},\ \ldots$$

$**$ הסבר: $\dim U=\frac{n^2-n}{2}$ משום שצריך מטריצות אנטי סימטריות כל איברי האלכסון שווים ל-0. אחרת לא יתקיים $A^t=-A$. הבסיס שנבנה לתרגיל זה:

אם הבינו ריקות הן 1 נניח (נכון) ריקות הן 1-

$$e_1=\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&0&\\0&&\ddots&0\end{pmatrix},\ e_2=\begin{pmatrix}0&0&1&\cdots&0\\0&\ddots&&&\vdots\\-1&&0&&\vdots\\ \vdots&&&\ddots&\\0&&&&0\end{pmatrix},\ \ldots$$

האיברים בבסיס הם כל כי נלבב המקומות הן 1 ו 0 כל אחד מטריצה שווים לאפס. כמו כן הם פורשים את U

תהתה נניח $B\in U$

$$B=\begin{pmatrix}0&b_{12}&b_{13}&\cdots&b_{1n}\\-b_{12}&&&&\vdots\\-b_{13}&&&&\vdots\\ \vdots&&&&\vdots\\-b_{1n}&\cdots&\cdots&\cdots&0\end{pmatrix}$$

$$B=b_{12}\cdot e_1+b_{13}\cdot e_2+\ldots+b_{n-1,n}\cdot e_{\frac{n^2-n}{2}}$$

ולכן הוא בבסיס של U

*** הסבר: $\dim V = \frac{n^2-n}{2}+n$ נשאר שאנו מראים G מטריצות סימטריות לא שונות מה בגין בינלבסן, לכן

$$e_1=\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\0&\ddots&&\vdots\\\vdots&&\ddots&0\\0&\cdots&0&0\end{pmatrix},\quad e_2=\begin{pmatrix}0&1&\cdots&0\\1&\ddots&&\vdots\\\vdots&&\ddots&0\\0&\cdots&0&0\end{pmatrix},\quad \ldots\ldots$$

שיהיו לכולם.

שלב: איברים אלו כמו כפולת הקבוע - יהיו בכולן בקואורדינטות ה i,j ו 1 ($i<j$) בגין מיקומי ה i,j 1 כשאר אפסים

$$e_{n+1}=\begin{pmatrix}0&1&&\\1&0&\ddots&\\&\ddots&\ddots&0\\&&0&0\end{pmatrix},\quad e_{n+2}=\begin{pmatrix}0&0&1&\\0&\ddots&&0\\1&&\ddots&\\&0&&0\end{pmatrix},\quad \ldots\ldots$$

אלו הם איברים בתוך המרחב עם (שזה כי שלב בקואורדינטות הן i,j ה B האיברים שונים מ-0).

נניח כי $B\in V$

$$B=\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}&\cdots&b_{1n}\\b_{12}&b_{22}&&&\vdots\\b_{13}&&\ddots&&\vdots\\\vdots&&&\ddots&\\b_{n1}&\cdots&\cdots&\cdots&b_{nn}\end{pmatrix}=b_{11}e_1+b_{22}e_2+\ldots+b_{nn}e_n+$$

$$+b_{12}e_{n+1}+\ldots+b_{n-1,n}\cdot e_{\frac{n^2-n}{2}+n}.$$

לכן נשאר שקיבלנו:

$$\dim U+\dim V=\left(\frac{n^2-n}{2}\right)+\left(\frac{n^2-n}{2}+n\right)=n^2=\dim M_n(\mathbb{F})$$

ונשאר ל: $U\cap V=0$ ונשאר ל $U\subset M_n(\mathbb{F})$ $V\subset M_n(\mathbb{F})$

אז:

$$M_n(\mathbb{F})=U+V$$

שאלה 5 סעיף ב':

$A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ $\quad tr(AA^t)=0$ $\quad$ לכן $\quad A=0$

~~לכל מטריצה A ו B מתקיים $tr(AB)=tr(BA)$.~~

11/11

~~$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2$~~

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$A^t=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & & & \vdots \\ a_{13} & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$tr(AA^t)$ הוא סכום איברי האלכסון הראשי של AA^t

כל a_{ii} אחד מאברי האלכסון של AA^t

לפי הגדרת הכפל שלהם $a_{ii}=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 = a_{i1}^2+a_{i2}^2+\dots+a_{in}^2$

לכן לכל i $\quad a_{ii}\geq 0$ כי הוא סכום של

ריבועים ממשיים. כאן כן לפי הנתון

$$tr(AA^t)=\sum_{i=1}^{n} a_{ii}=0$$

ולכן לכל i $\quad a_{ii}=0$.

קבלנו שלכל i

$$a_{i1}^2+a_{i2}^2+\dots+a_{in}^2=0$$

ולכן לכל i

$$a_{i1}=0,\ a_{i2}=0,\ \dots,\ a_{in}=0$$

לכן המטריצה $A=0$

סיים

1029/1031

מחברת מס' 1
מתוך 11 מחברות

TEL AVIV UNIVERSITY אוניברסיטת תל-אביב

36

לפני התחלת הבחינה מלא את כל הפרטים הבאים בכתב ברור וקרא בעיון את ההוראות:

1. על הנבחן להיבחן רק בחדר שבו הוא רשום.
2. עם הכניסה לחדר הבחינה יש להניח את החפצים בצד לרבות מכשירי קשר ומצעי תקשורת אחרים כשהם כבויים.
3. אסור להחזיק בהישג יד, בחדר הבחינה או בסמוך לו, כל חומר הקשור לבחינה/לקורס פרט לחומר שהשימוש בו הותר בכתב על ידי המורה.
4. יש למלא את הפרטים על מחברת הבחינה במקום המיועד לכך בלבד. אין לכתוב את השם או כל פרט מזהה אחר בתוך המחברת.
5. יש להישמע להוראות המשגיח. נבחן לא יעזוב את מקומו ללא קבלת רשות המשגיח. הפונה בשאלה או בבקשה ירים את ידו.
6. נבחן שנכנס לחדר הבחינה וקיבל את השאלון (סופס הבחינה) לידו ייחשב כמי שנבחן במועד זה. היה והחליט לא לכתוב את הבחינה, לא יהא רשאי לעזוב את חדר הבחינה, אלא כעבור חצי שעה ממועד תחילתה ולאחר שהחזיר את המחברת והשאלון. ציונו בבחינה יהיה "0".
7. קריאת השאלון מותרת רק לאחר קבלת רשות המשגיח.
8. יש לכתוב את התשובות בעט, בכתב יד ברור ונקי. נבחן הבוחר לכתוב טיוטה יעשה זאת בעמודו הימני של דפי מחברת הבחינה ויציין בראש העמוד "טיוטה". אין לתלוש דפים מהמחברת.
9. מחברות הבחינה שקיבל הנבחן תהיינה בפיקוחו ובאחריותו במשך כל הבחינה. בעת יציאה מן החדר יופקדו המחברות והשאלון בידי המשגיח.
10. בתום הבחינה יחזיר הנבחן את המחברות והשאלון ויקבל מידי המשגיח את כרטיס הנבחן.
11. המהנ בניגוד להוראות ול"נוהל סדרי בחינות ודיווח ציונים" צפוי להפסקת בחינתו ואף להעמדה לדין משמעתי.
12. אין לכתוב מעבר לקו האדום משני צידי הדף.

בהצלחה.

לשימוש המורה הבוחן:

הציון	100
המחברת נבדקה ביום	
חתימת המורה	

תאריך הבחינה 21/9/04

שם הקורס אלגברה לינארית

שם המורה יבורה שלום

החוג/המגמה מתמטיקה

מס' זיהוי
(העתק מכרטיס הנבחן/התלמיד)

66576

A-66