גירסה 1.00 – 26.10.03

סיכום באלגברה א

מסמך זה הורד מהאתר http://underwar.livedns.co.il.

liran
Email: underwar@hotmail.com
Home Page: http://underwar.livedns.co.il

אנא שלחו תיקונים והערות אל המחבר.

שדות ומספרים מרוכבים

הגדרה:

קבוצה F תקרא שדה אם יש ב F שתי פעולות +, • שתקראנה חיבור וכפל ומתקיימות הדרישות הבאות:

1. [סגירות לחיבור] $a,b \in F \Rightarrow a+b \in F$
2. [אסוציטיביות לחיבור] $a, b, c \in F \Rightarrow (a+b)+c = a+(b+c)$
3. [נייטרלי לחיבור] קיים איבר נייטרלי לחיבור ב F "אפס" ויסומן '0' והוא מקיים: $\forall a \Rightarrow a+0 = a$
4. [איבר נגדי] לכל $a \in F$ יש אביר נגדי ב F שיסומן $-a$ (מינוס a) כך ש: $a + (-a) = 0$
5. [קומוטטיביות בחיבור] $a,b \in F \Rightarrow a + b = b + a$
6. [סגירות לכפל] $a,b \in F \Rightarrow a \bullet b \in F$
7. [אסוציטיביות לכפל] $a \bullet (b \bullet c) = (a \bullet b) \bullet c$
8. [נייטרלי לכפל] קיים ב-F איבר נייטרלי לכפל שיקרא יחידה ויסומן '1' ומקיים: $\forall a \in F \Rightarrow 1 \bullet a = a$
9. [איבר הופכי] לכל $0 \neq a \in F$ יש איבר הופכי שיסומך ב $a^{-1} \in F$ מקיים $a \bullet a^{-1} \in F$
10. [קומוטטיביות בכפל] $a,b \in F \Rightarrow a \cdot b = b \cdot a$
11. [דיסטריבוטיביות] $a,b,c \in F \Rightarrow a(b+c) = ab + ac$

משפט: יהא F שדה אזי:

1. 0 (אפס) הוא יחיד
2. $a \in F \Rightarrow a \cdot 0 = 0$
3. $a,b \in F$ כך ש $a \cdot b=0 \Rightarrow a=0 \vee b=0$

משפט: $a,b,n \in N$

1. $(a+b)(\text{mod } n) = [a(\text{mod } n) + b(\text{mod } n)](\text{mod } n)$
2. $(ab)(\text{mod } n) = [a(\text{mod } n) \cdot b(\text{mod } n)](\text{mod } n)$

משפט: $\mathbf{Z}_n$ הוא שדה אם ורק אם **n** הוא ראשוני.

משפט: קבוצת המספרים המרוכבים (שנסמן אותה ב-C) היא שדה ביחס לפעולות שהוגדרו.

$$\overline{Z_1 + Z_2} = \overline{Z_1} + \overline{Z_2} \qquad Z + \overline{Z} = 2\text{Re}(Z) \qquad |Z_1 + Z_2| \le |Z_1| + |Z_2|$$

$$\overline{Z_1 \cdot Z_2} = \overline{Z_1} \cdot \overline{Z_2} \qquad Z - \overline{Z} = 2\text{Im}(Z) \qquad |Z_1 \cdot Z_2| = |Z_1| \cdot |Z_2|$$

$$\overline{\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)} = \frac{\overline{Z_1}}{\overline{Z_2}} \qquad Z \cdot \overline{Z} = |Z|^2 \qquad \left|\frac{Z_1}{Z_2}\right| = \frac{|Z_1|}{|Z_2|}$$

משפט:

אם $Z_1 = r_1 \cdot (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$, $Z_2 = r_2 \cdot (\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ אז

$$Z_1 \cdot Z_2 = r_1 r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)]$$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)]$$

משפט: סכום שורשי היחידה שווה ל-0.

<u>מטריצות</u>

1. מטריצה ריבועית - מטריצה $A_{n\times n}$
2. אלכסון ראשי של מטריצה ריבועית – האיברים a_{ii}
3. מטריצת <u>אפס</u> – מטריצה שכל איבריה שווים לאפס (לדוגמא: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$)
4. מטריצת <u>יחידה</u> - מטריצה ריבועית שכל אברי האלכסון שווים ל-1 ובכל מקום אחר 0. (לדוגמא: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$)
5. מטריצה <u>אלכסונית</u> – מטריצה ריבועית שבה כל האיברים מחוץ לאלכסון הראשי שווים לאפס. $\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & a_n \end{pmatrix}$
6. מטריצה <u>סקלרית</u> – מטריצה אלכסונית שבה כל אברי האלכסון הראשי שווים $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$
7. מטריצה A תיקרא <u>סימטרית</u> אם $A^t = A$ - מטריצה סימטרית חייבת להיות ריבועית ואבריה מקיימים $a_{ij} = a_{ji}$
8. מטריצה A תיקרא <u>אנטי סימטרית</u> אם $A^t = -A$ מטריצה אנטי סימטרית חייבת להיות ריבועית ואבריה מקיימים $a_{ij} = -a_{ij}$ (הערה: בכל שדה שאינו מודולו-2 יופיעו אפסים באלכסון הראשי)
9. מטריצה ריבועית נקראת משולשת עליונה [תחתונה] אם כל האיברים מתחת [מעל] לאלכסון הראשי הם אפסץ
10. וקטור שורה [עמודה] = מטריצה בעלת שורה [עמודה] אחת בלבד.

<u>משפט:</u> A,B,C מטריצות , α,β סקלארים

1. $A+B = B+A$
2. $(A+B)+C = A+(B+C)$
3. $A+0=A$
4. $A+(-1)A=0$
5. $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$
7. $(\alpha A)^t = \alpha A^t$
8. $(\alpha\beta)A=\alpha(\beta A)$
9. $(A\pm B)^t = A^t \pm B^t$
10. $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$
11. $(A^t)^t = A$

<u>משפט:</u>

1. $(AB)C=A(BC)$
2. $A(B+C)=AB+AC$
3. $(B+C)D=BD+CD$
4. $AI=IA=A$
5. $0A=A0=0$
6. $(AB)^t = B^t A^t$

<u>משפט:</u> כל מטריצה מעל שדה F שקולה שורות למדורגת מצומצמת (קנונית) אחת ויחידה.

<u>משפט:</u> A מטריצה אזי:

1. אם φ פעולה על שורות אזי: $\varphi(A) = \varphi(I) \cdot A$
2. אם θ היא פעולה על עמודות אזי: $\theta(A) = A \cdot \theta(I)$

מרחבים וקטורים ותתי מרחבים

קבוצה V תקרא מרחב וקטורי מעל שדה F אם קיימות שתי פעולות +, • שתקראנה חיבור וכפל, חיבור בין אברי V, וכפל בין אברי V לאברי השדה. כך שמתקיימות הדרישות הבאות:

1. [סגירות לחיבור] $u,v \in V \Rightarrow u+v \in V$
2. [אסוציטיביות לחיבור] $u,v,w \in V \Rightarrow (v+u)+w = v+(u+w)$
3. [נייטרלי לחיבור] קיים איבר נייטרלי לחיבור ב V "אפס" ויסומן '0' והוא מקיים: $\forall v \in V \Rightarrow v+0=v$
4. [איבר נגדי] לכל $v \in V$ יש אביר נגדי ב V שיסומן v- (מינוס v) כך ש: $v + (-v) = 0$
5. [קומוטטיביות בחיבור] $v,u \in V \Rightarrow u+v=v+u$
6. [סגירות לכפל] $v \in V, \alpha \in F \Rightarrow \alpha v \in V$
7. [דיסטריביוטיביות סקלר] $v,u \in V, \alpha \in F \Rightarrow \alpha(v+u) = \alpha v + \alpha u$
8. [דיסטריביוטיביות מ.ו] $v \in V, \alpha,\beta \in F \Rightarrow (\alpha+\beta) \cdot v = \alpha v + \beta v$
9. [נייטרלי לכפל] $1 \in F, v \in V \Rightarrow 1 \cdot v = v$
10. [קומוטטיביות בכפל] $\alpha,\beta \in F, v \in V \Rightarrow (\alpha\beta) \cdot v = \alpha(\beta \cdot v)$

<u>משפט:</u> יהא V מרחב וקטרי מעל שדה F.
1. $0 \in V, \alpha \in F \Rightarrow 0 = \alpha \cdot 0$
2. $v \in V, 0 \in F \Rightarrow 0 = 0 \cdot v$
3. $\alpha \in F, v \in V \Rightarrow \alpha \cdot v = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \vee v = 0$
4. $\alpha \in F, v \in V \Rightarrow (-\alpha)v = \alpha(-v) = -(\alpha v)$

<u>משפט:</u> V מ.ו , U תת קבוצה, אזי U תת מרחב וקטורי אם ורק אם מתקיימות 3 הדרישות הבאות:
1. U לא ריקה
2. $u_1,u_2 \in U \Rightarrow u_1+u_2 \in U$
3. $\alpha \in F, u \in U \Rightarrow \alpha \cdot u \in U$

<u>הגדרה:</u> אוסף כל הצירופים הלינארים של $v_1,v_2,...,v_n$ נקרא המרחב $L(v_1,v_2,...,v_n) = v_1,v_2,...,v_n$ הנפרש ע"י $v_1,v_2,...,v_n$ נסמן: $s = \{v_1,v_2,...,v_n\}$, L(s) = Sp(s) = המרחב הנפרש.

<u>משפט:</u> V מ.ו, S תת קבוצה סופית של V, אזי L(s) הוא תת מרחב וקטורי של V "הקטן" ביותר שמכיל את S (כל תת מרחב המכיל את S מכיל גם את L(s))

<u>משפט:</u> מרחב הנפרש ע"י שורות של מטריצה נקרא מרחב השורות של המטריצה. (הערה: למטריצות שקולות שורה יש אותו מרחב שורות).

<u>משפט:</u> V מ.ו, u,w תתי מרחבים אזי $u \cap w$ תת מרחב וקטורי.

<u>משפט:</u> u,w תתי מרחבים של מרחב וקטורי V, אזי: u+w גם תת מרחב וקטורי.

<u>הגדרה:</u> סכום ישר- U,W תתי מרחבים של מרחב וקטורי, אזי U+W סכום ישר, אם כל איבר ב- U+W ניתן לרשום באופן יחיד בצורה $u+w$ $u \in U, w \in W$ נסמן: $U \oplus W$.

<u>משפט:</u> u,w תתי מרחבים של V מ.ו, אזי הסכום u+w הוא ישר אם ורק אם $u \cap w = \{0\}$

מערכות של משוואות לינאריות

משפט: תהא Ax=0 מערכת הומוגנית עם n נעלמים מעל שדה F, אזי אוסף כל הפתרונות הוא תת מרחב של F^n

מסקנה: למערכת הומוגנית מעל שדה אינסופי, יש פתרון יחיד או אינסוף פתרונות.

משפט: תהא Ax=b מערכת משוואות לינאריות, נניח $X=a_0$ הוא פתרון למערכת, אזי אוסף כל הפתרונות של המערכת הוא: $T = \{ X = a_0 + d \mid Ax = 0 \text{ פותר } d \}$

מסקנה: תהא Ax=b מעל שדה אינסופי, אזי או שאין פתרון או שיש פתרון יחיד או שיש אינסוף פתרונות.

משפט: תהא Ax=b מערכת משוואות לינאריות עם n נעלמים מעל שדה F אזי:

1. יש פתרון אם ורק אם $r(A) = r(A^*)$
2. אם יש פתרון, מספר הנעלמים שניתן לבחור שרירותית הוא $n-r(A)$
3. יש פתרון יחיד אם ורק אם $r(a) = r(A^*) = n$

מטריצות הפיכות

הגדרה: מטריצה ריבועית A תקרא הפיכה אם יש מטריצה ריבועית אחרת B כך ש $AB = BA= I$

אם יש כזאת B היא תקרא ההופכית של A ותסומן ב A^{-1}

משפט:

1. אם A מטריצה הפיכה אזי יש לה הופכית יחידה
2. אם A,B הפיכות מאותו סדר אז גם AB הפיכה ומתקיים $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
3. אם A הפיכה אזי גם A^t הפיכה ומתקיים $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$

משפט: תהא A מטריצה $n\times n$ מעל שדה F. שלושת התנאים הבאים שקולים:

1. A הפיכה
2. $r(A) = n$
3. A שקולה שורות ל I

בסיסים ומימדים

הגדרה: (תלוי לינארית) V מ.ו, $v_1,v_2,...,v_n$ איברים ב V אזי $v_1,v_2,...,v_n$ יקראו תלויים לינארית אם קיימים $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ סקלרים כך ש $\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2+...+\alpha_n v_n=0$ ולא כל $\alpha=0$.

הגדרה: (בלתי תלוי לינארית) V מ.ו, $v_1,v_2,...,v_n$ איברים ב V אזי $v_1,v_2,...,v_n$ יקראו בלתי תלויים לינראית אם כל שיוויון $\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2+...+\alpha_n v_n=0$ גורר בהכרח $\alpha_1=\alpha_2=...=\alpha_n=0$

משפט: V מ.ו מעל שדה F.
1. כל קבוצה שמכילה 0 היא תלוייה לינארית.
2. קבוצה שמכילה קבוצה תלוייה לינארית גם היא תלוייה לינראית
3. קבוצה מוכלת בקבוצה בלתי תלוייה לינארית גם היא בלתי תלוייה לינארית.
4. $v_1,v_2,...,v_n$ תלויים לינראית אם ורק אם לפחות אחד מהם הוא צירוף לינארי של האחרים.
5. $v_1,v_2,...,v_n$ תלויים לינארית ושונים ומאפס אם לפחות אחד מהם הוא צירוף לינארית של קודמיו.
6. $v_1,v_2,...,v_n$ תלויים לינארית אם ורק אם הוא פורפוציונלים (כלומר אחד מהם הוא כפולה של האחר בסקלר).
7. שורות שונות מאפס של מטריצה מדוגרת הן בלתי תלוייות לינארית.

הגדרה: בסיס למרחב וקטורי הוא קבוצה פורשת ובלתי תלויה לינארית.

הגדרה: מרחב וקטורי שיש לו בסיס עם מספר סופי של איברים נקרא מרחב מימד סופי.

משפט: V מ.ו, A קבוצה פורשת בת m איברים, B קבוצה בלתי תלוייה לינארית בת n איברים, אזי $m \geq n$.
מסקנה: V מ.ו אזי בכל בסיס יש אותו מספר איברים.

הגדרה: מספר האיברים בבסיס של מ.ו V נקרא המימד של V, סימון: dim(V).

משפט: יהא V מ.ו , B בסיס אזי כל אבירי V ניתן לרשום כצרוף לינארי של אברי B באופן יחיד.

הגדרה: $B=\{v_1,v_2,...,v_n\}$, V מ.ו, $V=\alpha_1 v_1,\alpha_2 v_2,...,\alpha_n v_n$ אזי $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ נקראים הקואורדינטות של V בבסיס B.

משפט: שלושת התנאים הבאים שקולים:
1. B בסיס
2. B קבוצה בלתי תלוייה לינארית מכסימלית (כלומר כל קבוצה שמכילה אותה תהיה כבר תלוייה לינארית)
3. B קבוצה פורשת מינימלית (פורשת, אף כל תת קבוצה אמיתית אינה פורשת)

משפט: יהא V מ.ו ממימד n אזי:
1. כל n+1 איברים ב V הם תלויים לינארית.
2. כל קבוצה בלתי תלוייה לינארית בת n איברים היא בסיס.
3. כל קבוצה פורשת בת n איברים היא בסיס.
4. כל קבוצה בלתי תלוייה לינארית ניתנת להשלמה לבסיס.

משפט: (המימדים ה-I) V מ.ו, u,w תתי מרחבים אזי
$$\dim(u+w)=\dim(u)+\dim(w)-\dim(u\cap w)$$

משפט: מימד מרחב השורות במטריצה שווה למימד מרחב העמודות.
ניסוח אחר: $r(A)=r(A^t)$

משפט: A,B מטריצות כך ש AB מוגדרת. אזי העמודות של AB הן צירופים לינאריים של העמודות של A.

משפט:
1. $r(AB) \le r(A)$
2. $r(AB) \le r(B)$

משפט:
1. אם B הפיכה אז $r(AB) = r(A)$
2. אם A הפיכה אז $r(AB) = r(B)$

טרנספורציות לינאריות

הגדרה: W,V שני מ.ו מעל אותו שדה F.
פונקציה $T:V \to W$ תיקרא טרנספורציה לינארית [העתקה לינארית] אם:
1. $T(v_1+v_2)=T(v_1)+T(v_2) \quad \Leftarrow \quad \forall v_1,v_2 \in V$
2. $T(\alpha v)=\alpha T(v) \quad \Leftarrow \quad \forall \alpha \in F, v \in V$

משפט: תהא $T:V \to W$ טרנספורציה לינארית, $v \in V$ אזי:
1. $T(0)=0$
2. $T(-v)=-T(v)$

הגדרה: הגרעין של $T:V \to W$ שיסומן ב Ker(T) יוגדר כך: $\ker(T)=\{v \in V \mid T(v)=0\}$
התמונה של $T:V \to W$ שתסומן ב Im(T) תוגדר כך: $\mathrm{Im}(T)=\{T(v) \mid v \in V\}$
$\ker(T) \subseteq V$
$\mathrm{Im}(T) \subseteq W$

משפט: תהא $T:V \to W$ טרנספורציה לינארית
1. $\ker(T)$ תת מרחב של V.
2. $\mathrm{Im}(T)$ תת מרחב של W.
3. T על אם ורק אם $\mathrm{Im}(v)=W$
4. T חד חד ערכית ($T(v_1)=T(v_2) \quad \Rightarrow \quad v_1=v_2$) אם ורק אם $\ker(T)=\{0\}$
5. אם $v_1,v_2,...,v_n$ פורשים את V אזי $T(v_1),T(v_2),...,T(v_n)$ פורשים את $\mathrm{Im}(T)$

משפט: (המימדים ה-II) V,W מ.ו מעל שדה F. תהא $T:V \to W$ טרנספורציה לינארית אזי:
$\dim(V)=\dim(\ker(T))+\dim(\mathrm{Im}(T))$

הגדרה: מימד התמונה של T טרנספורציה לינארית נקרא הדרגה של T = r(T)

משפט: תהא A מטריצה $m \times n$ מעל שדה F. נגדיר $T:F^n \to F^m$ ע"י $T(v)=Av$ אזי:
1. מרחב העמודות של המטריצה A
2. $r(A)=r(T)$

<u>משפט:</u> V,W שני מ.ו מעל שדה F.
יהיה $v_1, v_2, ..., v_n$ בסיס ל V. יהיו $w_1, w_2, ...w_n$ איברים כלשהם ב W.
אזי קיימת T טרנספורציה לינארית אחת ויחידה כך ש:

$$T(v_1) = w_1$$
$$T(v_2) = w_2$$
$$\vdots$$
$$T(v_n) = w_n$$

<u>הגדרה:</u> V,W מ.ו מעל שדה F. אוסף כל הטרנספוציות הלינאריות מ- V ל – W יסומן ב Hom(V,W)

<u>משפט:</u> Hom(V,W) הוא מ.ו ביחס לחיבור וכפל בסקלר שהגדרנו. המימד של Hom(V,W) הוא dim(V)*dim(W)

<u>הגדרה:</u>

- כפל טרנספוציות לינאריות בסקלר: תהא $T : V \to W$ טרנספורציה לינארית

$$\alpha T : V \to W$$
$$(\alpha T)(u) = \alpha T(u)$$

- חיבור טרנספוציות לינאריות: יהיו $S, T : V \to W$ טרנספורציות לינאריות

$$(S + T) : V \to W$$
$$(S + T)(u) = S(u) + T(u)$$

- הרכבת טרנספוציות לינאריות: V,W,U מ.ו מעל שדה F
S, T טרנספורמציות לינאריות. נגדיר:

$$V \xrightarrow{S} W \xrightarrow{T} U$$
$$TS : V \to U$$
$$(TS)(v) = T(S(v))$$

<u>הגדרה:</u> V מ.ו, $I : V \to V$ תיקרא טרנספורצמית הזהות שתקיים $\forall v \in V \quad \Leftarrow \quad I(v) = v$

<u>הגדרה:</u> $T : V \to V$ נניח ש T ח.ח.ע ועל אזי יש פונקציה הפוכה $T^{-1} : V \to V$ וגם T^{-1} טרנספורציה לינארית.

<u>משפט:</u> $T : V \to V$ אזי: T הפיכה $\Leftrightarrow$ T ח.ח.ע $\Leftrightarrow$ T על

<u>הגדרה:</u> תהא $T : V \to W$ טרנספורציה לינארית שהיא ח.ח.ע ועל (בפרט הפיכה) ניקראת איזומורפיזם.
שני מרחבים וקטורים W,V נקראים איזומורפים אם קיים איזומופיזם בניהם. סימון: $V \cong W$
לדוגמא: $R^4 \cong R^{2\times 2} \cong P_3[x]$

<u>משפט:</u> $V \cong W$ אם ורק אם $\dim(V) = \dim(W)$

<u>יצוג טרנספורציות ע"י מטריצות</u>

<u>מטרה:</u> נתונה $T:V\to W$, B בסיס ל V , C בסיס ל W.
מחפשים מטריצה A כך ש $A[V]_B=[T(v)]_C$ (כאשר $[V]_B$ וקטור קואורדינטות לפי בסיס B, ו $[T(v)]_C$ וקטור קואודינטות של הטרנספורציה לפי בסיס C)

$$B=\{e_1,e_2,...,e_n\}$$
$$C=\{f_1,f_2,...,f_m\}$$
$$T(e_1)=a_{11}f_1+a_{12}f_2+...+a_{1m}f_{1m}$$
$$T(e_2)=a_{21}f_1+a_{22}f_2+...+a_{2m}f_{1m}$$
$$\vdots$$
$$T(e_n)=a_{n1}f_1+a_{n2}f_2+...+a_{nm}f_{nm}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}^t=[T]_B^C = A$$

<u>הערה:</u> $[T]_B^B=[T]_B \quad T:V\to V,$

<u>משפט:</u> $[T]_B^C\cdot[V]_B=[T(v)]_C$

<u>מסקנה:</u> $T:V\to W$, B בסיס ל V , C בסיס ל W. אזי $r(T)=r\left([T]_B^C\right)$

<u>מסקנה:</u> לכל המרטיצות המייצגרות של ט.ל יש אותה דרגה.

<u>משפט:</u> $T,S\in\hom(v,w)$, B בסיס לV , C בסיס לW אזי:

1. $[T+S]_b^C=[T]_B^C+[S]_B^C$
2. $[\alpha T]_B^C=\alpha[T]_B^C$

<u>משפט:</u> V מ.ו, B בסיס לV, $v,u\in V$ אזי $[v+u]_B=[v]_B+[u]_B$

<u>משפט:</u> V מ.ו ממימד n, B בסיס. A מטריצה $m\times n$. אם עבור כל $v\in V$ מתקיים $A[v]_B=0$ אזי בהכרח $A=0$.

<u>מסקנה:</u> V מ.ו ממימד n $A_{m\times n},D_{m\times n}$ מטריצות, B בסיס ל-V. אם לכל $v\in V$ מתקיים $A[v]_B=D[v]_B$ אזי בהכרח $A=D$.

<u>משפט:</u> $V\xrightarrow{S}W\xrightarrow{T}U$, כך ש B בסיס לV, C בסיס ל W, D בסיס ל U. אזי:

$$[TS]_B^D=[T]_C^D\cdot[S]_B^C$$

<u>משפט:</u> $I:V\to V$ טרנספורצמית הזהות, B בסיס ל V אזי $[I]_B=I$

<u>משפט:</u> $T:V\to V$ טרנספורציה לינארית הפיכה, B בסיס לV אזי $\left([T]_B\right)^{-1}=[T^{-1}]_B$

<u>שינוי בסיסים</u>

<u>הגדרה:</u> יהא V מ.ו, נקח שני בסיסים: $e=\{e_1,e_2,...,e_n\}$, $f=\{f_1,f_2,...,f_n\}$

P תיקרא מטריצת המעבר מבסיס e לבסיס f .

$$\begin{aligned} f_1 &= a_{11}e_1+a_{12}e_2+...+a_{1n}e_n \\ f_2 &= a_{21}e_1+a_{22}e_2+...+a_{2n}e_n \\ &\vdots \\ f_n &= a_{n1}e_1+a_{n2}e_2+...+a_{nn}e_n \end{aligned} \qquad P=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}^t$$

<u>משפט:</u>

1. $P[v]_f=[v]_e$
2. $P^{-1}[v]_e=[v]_f$

<u>משפט:</u> $T:V\to V$ טרנספורציה לינארית, e,f בסיסים של V אזי: $[T]_f=P^{-1}[T]_eP$

<u>הגדרה:</u> A,B מטריצות נקראות דומות אם קיימת מטריצה P הפיכה כך ש $B=P^{-1}AP$

<u>משפט:</u> למטריצות דומות יש אותה דרגה, כלומר $r(B)=r(A) \quad \Rightarrow \quad B=P^{-1}AP$.

<u>הגדרה:</u> סכום אברי האלכסון הראשי של מטריצה נקרא העקבה של A יוסמן ב $tr(A)$.

<u>משפט:</u> אם A, B מטריצות ריבועיות אזי $tr(AB)=tr(BA)$.

<u>מסקנה:</u> למטריצות דומות יש אותה עקבה.

<u>דטרמיננטות</u>

<u>הגדרה:</u> דטרמיננטה של מטריצות ריבועיות A תסומן ב $|A|$ או $\det(A)$.

<u>הגדרה:</u> הדטרמיננטה של מטריצה המתקבלת ממטריצה A ע"י מחיקת שורה i ועמודה j נקראת המינור ה- i,j של A ותסומן ב M_{ij}.

<u>משפט:</u> כל מה שנכון עבור שורות של דטרמיננטה נכון גם עבור עמודות כלומר $|A|=|A^t|$

<u>משפט:</u> אפשר לפתח דטרמיננטה לפי כל שורה/עמודה. האיבר ה i,j הוא $(-1)^{i+j}a_{ij}$.

<u>כללים לחישוב דטרמננטים:</u>

1. אם אחת השורות/עמודות היא אפסים אזי הדטרמננטה שווה לאפס.
2. הדטרמיננטה של מטריצה משולשת שווה למכפלת אברי האלכסון הראשי.
3. אם מחליפים שתי שורות/עמודות זו בזו סימן הדטרמיננטה מתחלף.
4. אם יש שתי שורות/עמודות שוות הדטרמיננטה שווה לאפס.
5. ניתן להוציא גורם משותף משורה/עמודה.
6. אם יש שתי שורות/עמודות פורפוציונליות אזי הדטרמיננטה שווה לאפס.
7. אם נוסיף לשורה/עמודה כפולה של שורה/עמודה אחרת הדטרמיננטה לא משתנה.

<u>מסקנה:</u> אם השורות/עמודות תלויות לינארית אזי הדטרמיננטה שווה לאפס.
<u>הערה:</u> אם B,A שקולות שורה אזי $|A|=0$ אם ורק אם $|B|=0$

<u>משפט:</u> $|A|=0$ אם ורק אם השורות של A הם תלויות לינארית.

<u>מסקנה:</u> A הפיכה אם ורק אם $|A|\neq 0$

- ***דטרמיננטות ומטריצות הפיכות***

<u>הגדרה:</u> תהא $A_{n\times n}$ מטריצה נגדיר מטריצה $n\times n$ ששמה $adj(A)$, האיבר ה i,j במטריצה $adj(A)$ הוא $(-1)^{i+j}M_{ij}$.

<u>משפט:</u> $A\cdot adj(A)=|A|\cdot I$

<u>מסקנה:</u> אם $|A|\neq 0$ $A\cdot\frac{1}{|A|}adj(A)=I$ כלומר $A^{-1}=\frac{1}{|A|}adj(A)$.

- ***דטרמיננטות ומשוואות לינאריות***

<u>הגדרה:</u> (הכלל של קרמר) תהא $Ax=b$ מערכת משוואות של n משוואות עם n נעלמים.
נניח $|A|\neq 0$ כלומר פתרון יחיד. נסמן $|A|=\Delta$
הדטרמיננטה של A לאחר שהעמודה ה i הוחלפה בעמודה b תיקרא Δ_i אזי:

אם $x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ אזי
$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}$$
$$x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}$$
$$\vdots$$
$$x_n=\frac{\Delta_n}{\Delta}$$

- ***דטרמיננטה של מכפלה***

<u>משפט:</u> A,B מטריצות ריבועיות מאותו סדר ($n\times n$) אזי $|AB|=|A||B|$

<u>מסקנה:</u> אם A הפיכה אזי $|A^{-1}|=\frac{1}{|A|}$

ערכים עצמיים

<u>הגדרה:</u> $T:V\to V$ טרנספורציה לינראית תיקרא לכסינה אם קיים בסיס B ל V כך ש $[T]_B$ מטריצה מייצגת לפי בסיס B היא אלכסונית.

<u>הגדרה:</u> $A_{n\times n}$ מטריצה ריבועית תיקרא לכסינה אם A דומה למטריצה אלכסונית.

<u>הגדרה: (ו.ע, ע.ע)</u> $T:V\to V$ טרנספורציה לינארית, $v\in V, v\neq 0$ יקרא <u>וקטור עצמי (ו.ע)</u> אם קיים $\alpha\in F$ כך ש $T(v)=\alpha v$ ואז α יקרא <u>ערך עצמי (ע.ע)</u> של T המתאים לוקטור העצמי v .

<u>הגדרה: (ו.ע, ע.ע)</u> $A_{n\times n}$ מטריצה ריבועית מעל שדה F, $v\in F^n, v\neq 0$ יקרא <u>וקטור עצמי (ו.ע)</u> של A אם קיים $\alpha\in F$ כך ש $Av=\alpha v$ ואז α יקרא <u>ערך עצמי (ע.ע)</u> של A המתאים לוקטור עצמי v .

<u>משפט:</u> $T:V\to V$ טרנספורציה לינראית , B בסיס ל V, $[T]_B$ אלכסונית אם ורק אם כל אברי B הם וקטורים עצמיים (ו.ע) של T.

<u>משפט:</u> $A_{n\times n}$ מטריצה ריבועית אזי A אלכסונית אם ורק אם קיימים n וקטרים עצמיים (ו.ע) בלתי תלויים לינארית ל-A.

<u>הגדרה:</u> $T:V\to V$ טרנספורציה לינראית, B בסיס ל V, $|T|$ דטרמיננטה של T = דטרמיננטה של אחת מהמטריצות המייצגות $[T]_B$ (עם זוג בסיסים זהה $[T]_B^B$)

<u>הגדרה: (פ.א)</u> $|T-\alpha I|$ - הפולינום האופייני (פ.א) של T.

<u>הגדרה: (מ.ע)</u> יהא α_0 ערך עצמי (ע.ע) של T, אוסף כל הוקטורים העצמיים (ו.ע) של α_0 בצירוף האפס נקרא <u>המרחב העצמי (מ.ע)</u> של α_0. סימון: V_{α_0}

<u>משפט:</u> $T:V\to V$ טרנספורציה לינראית אזי:
1. הערכים העצמיים (ע.ע) הם השורשים של הפולינום האופייני (פ.א)
2.. הוקטורים העצמיים (ו.ע) של ערך עצמי (ע.ע) α הם האיברים השונים מאפס של $\ker(T-\alpha I)$
3. $V_\alpha = \ker(T-\alpha I)$ בפרט V_α הוא תת מרחב וקטורי של V.

<u>משפט:</u> וקטורים עצמיים (ו.ע) של ערכים עצמיים (ע.ע) שונים הם בלתי תלויים לינראית.

<u>משפט:</u> $A_{n\times n}$ מטריצה ריבועית לכסינה. יהיו $v_1,v_2,...,v_n$ וקטורים עצמיים (ו.ע) בלתי תלויים לינארית של A שמתאימים לערכים עצמיים (ע.ע) $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$. נסמן: $P=(v_1,v_2,...v_n)$ אזי:

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\alpha_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \alpha_2 & & \vdots\\ \vdots & & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & \cdots & \alpha_n\end{pmatrix}$$

<u>מסקנות:</u> אם למטריצה $n\times n$ יש n ערכים עצמיים (ע.ע) שונים אזי היא לכסינה (כלומר דומה למטריצה אלכסונית).

<u>הגדרה: (ר.א, ר.ג)</u> $T:V\to V$ טרנספורציה לינארית, α ערך עצמי (ע.ע) של T.
1. הריבוי של α בפולינום האופיני (פ.א) נקרא ה<u>ריבוי האלגברי (ר.א)</u> של α.
2. מספר הוקטורים העצמיים (ו.ע) הבלתי תלויים לינארית של α נקרא <u>הריבוי הגאומטרי (ר.ג)</u> של α.

<u>משפט:</u> $T:V\to V$ טרנספורציה לינארית α_0 ערך עצמי (ע.ע) של T אזי הריבוי האלגברי (ר.א) של α_0 גדול או שווה מהריבוי הגאומטרי (ר.ג). [מתקיים n ≥ ר.א ≥ ר.ג ≥ 1]

<u>מסקנה:</u> T לכסינה אם ורק אם עבור כל ערך עצמי (ע.ע) הריבוי האלגברי (ר.א) שווה לריבוי הגאומטרי (א.ג). [כלומר לכל ע.ע : ר.א = ר.ג ⇔ T לכסינה].

<u>משפט:</u> A מטריצה ריבועית. אזי A הפיכה אם ורק אם $\alpha=0$ <u>אינו</u> ערך עצמי (ע.ע) שלה.

<u>משפט:</u> תהא A מטריצה ריבועית הפיכה, יהא α_0 ערך עצמי (ע.ע) של A. אזי α_0^{-1} הוא ערך עצמי (ע.ע) של A^{-1}.

<u>משפט:</u> למטריצות דומות יש אותו פולינום אופייני (פ.א) ולכן אותם ערכים עצמיים (ע.ע).

<u>משפט:</u> ל AB ול BA יש אותם ערכים עצמיים (ע.ע).

<u>משפט:</u> A מטריצה ריבועית.
1. סכום הערכים העצמיים (ע.ע) של A = העקבה של A = $tr(A)$.
2. מכפלת הערכים העצמיים (ע.ע) של A = הדטרמיננטה של A = $|A|$.

<u>משפט:</u> A מטריצה ריבועית שבה סכום כל אברי השורה [או עמודה] הוא קבוע. אזי הסכום הקבוע הזה הוא ערך עצמי (ע.ע) ששייך לוקטור העצמי (ו.ע) הבא : $\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$.

<u>משפט:</u> ל A ול A^t יש אותו פולינום אופייני (פ.א) ולכן אותם ערכים עצמיים (ע.ע).

<u>מסקנה:</u> אם סכום האיברים בכל עמודה הוא קבוע K אזי K הוא גם ערך עצמי.

<u>משפט (קיילי-המילטון):</u> אם $f(x)$ הוא פולינום אופייני (פ.א) של מטריצה A אזי $f(A)=0$.