מס' מתב

מס' ת"ז

מועד ב' סמסטר ב' תשס"ד
21.9.2004

אלגברה לינארית 1

מרצה: פרופ' יהודה שלום
מתרגל: אסף שרון

- **משך הבחינה: שלוש שעות.**
- **חומר סגור ללא מחשבי עזר.**
- **יש לענות על שאלות 1,2 בעמודים הראשונים של מחברת הבחינה ועל שאלות 3-9 יש לענות בטופס בחינה זה, במקום המיועד לכך בלבד.**
- **מומלץ להעתיק את התשובות לשאלות 3-9 לטופס הבחינה רק לאחר בדיקה חוזרת ותוך שימוש בעמודים האחרונים של מחברת הבחינה כטיוטא. בניקוד שאלות אלו לא תהיה כל התייחסות לנכתב במחברת הבחינה אלא רק לנכתב בטופס עצמו.**
- **סך הנקודות שבשאלות הוא 106 אולם הציון המקסימלי הוא 100.**

בהצלחה!

1. (16 נק') יהי V מ"ו מעל F , $\{v_i\}\subseteq V$ תת-קבוצה. הוכיחו:
   א) $\{v_i\}$ בת"ל מקסימלית $\Leftarrow$ $\{v_i\}$ פורשת
   ב) $\{v_i\}$ פורשת מינימלית $\Leftarrow$ $\{v_i\}$ בת"ל

2. (20 נק') יהי F שדה ו- $A\in M_n(F)$

א) הוכיחו ישירות מהגדרת הדטרמיננטה (ולא בשום דרך אחרת!) שאם B מתקבלת מ- A ע"י החלפת העמודה הראשונה והשניה זו בזו אזי $\det A=-\det B$ (מותר להשתמש בכל טענה לגבי תמורות).

ב) רשמו ללא הוכחה, כיצד משתנה $\det A$ עם ביצוע כ"א מ- 3 הפעולות האלמנטריות על שורות A.

ג) הוכיחו כי A הפיכה אך ורק $\det A\neq 0$ (מתוך תורת הדטרמיננטות מותר להסתמך אך ורק על סעיף ב', אך ניתן להשתמש בכל תוצאה אחרת על מטריצות והכפלתן).

3. (15 נק') נתונה מערכת המשוואות הבאה מעל שדה הממשיים.

$$2(\lambda-1)x_1+(1-\lambda)x_2+(\lambda+1)x_3=\lambda$$

$$2(\lambda-1)x_1+(1-\lambda)x_2=\lambda-1$$

$$(2-\lambda-\lambda^2)x_1+(\lambda^2-1)x_2-(1+\lambda^2)x_3=-\lambda$$

רשמו לאלו ערכי λ למערכת:

א) יש אין-סוף פתרונות. תשובה: $1;0$

ב) אין אף פתרון. תשובה: -1

(רמז לבדיקה: קבוצת כל הערכים המתקבלים ב- א+ב מהווה סדרה חשבונית).

4. (15 נק') תהי $T:R_1[x]\to R_1[x]$ טרנספורמציית הגזירה.
יהיו $E=\{1,x\}$ $U=\{1+x,2+3x\}$ בסיסים ל- $R_1[x]$.
רשמו את המטריצות המייצגות את T ביחס לבסיסים אלו:

א) $[T]_E^E=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$

ב) $[T]_U^U=\begin{pmatrix}3&9\\-1&-3\end{pmatrix}$

ג) רשמו מטריצה (הפיכה) P המקיימת: $P^{-1}[T]_U^U P=[T]_E^E$

$P=\begin{pmatrix}3&-2\\-1&1\end{pmatrix}$

(שימו לב שניתן לבדוק ישירות את נכונות תשובתכם ב-ג')

בשאלות 5-9 רשמו ליד כל טענה נכון/לא נכון ותנו הוכחה קצרה.
מומלץ לרשום את התשובה בטופס רק לאחר בדיקה חוזרת.
אין לחרוג מהמקום המוקצה לתשובה. לכל שאלה 8 נקודות.

5. יהיה F שדה, $A=\begin{pmatrix}0 & a\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ כאשר $0\neq a\in F$.

לא נכון

אם $A^6=0$ אזי מציין F הוא 2.

$A^6=(A^2)^3=\left(\begin{pmatrix}0 & a\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & a\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right)^3=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}^3=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=0$

מעל $\mathbb{F}$ כי מעל כל שדה מתקיים $0\cdot a=0$ $\forall a\in F$

כלומר מי צה $\mathbb{F}$ לא חייבלי הפ' תקף מד"ן 2

למשל מעל $\mathbb{R}$ כיוון מד"ן 0 מתקיים

$0\cdot a=(1+1)a=$
$=-1\cdot a+a=$
כי
$-1\cdot a=-a$

$(A^2)^3=A^6=0 \Rightarrow A^6=0$ לא צורך בהכרחי.
מד"ן F שווה 2

6. יהיה F שדה, $A\in M_{5\times 6}(F)$ ו- $B\in M_5(F)$ הפיכה. אם עמודות A ו- B פורשות את אותו ת"מ של $F^{(5)}$ אזי שורות A הן בת"ל.

נכון

B הפיכה $\Leftarrow$ עמודות שלה פורשות ת"מ ב dim 5
$\Leftarrow$ פורשות את כל F^5 כי כל ת"מ ב dim 5 שלו F^5 שווה ל F^5.
כי B הפיכה $\Leftarrow$ $rk B=5$. אבל גם עמודות של A פורשות.
כל F^5 $\Leftarrow$ $rk A\geq 5$ וגם ברור שה $rk A\leq 5$ כי $A\in M_{5\times 6}(F)$,
כלומר $rk A=5$. rk של עמודות זהה לשורות
שה rk של שורות $\Leftarrow$ ל A יש 5 שורות ב"ת $\Leftarrow$
כל שורות של A ב"ת

7. לכל n טבעי קיימת מטריצה **רגולרית** $A\in M_n(R)$ המקיימת את השוויון $A'\cdot A=2A\cdot A'$ כאשר A' היא המטריצה המתקבלת מ- A ע"י חלוקת השורה הראשונה ב-2.

לא נכון

A רגולרית $\Leftarrow$ $\det A\neq 0$. נקבל

$\det(A'\cdot A)=\det A'\det A=\frac{1}{2}\det^2 A \to 2^n$
$\det(2AA^t)=\det(2A)\det A^t=(2)^n\det A\cdot\det A=(2)^n\det^2 A$
כי $\det A^t=\det A$, $\det\lambda A=\lambda\det A$. אזי:

$(2)^n\det^2 A=\frac{1}{2}\det^2 A \Leftrightarrow 2^n=\frac{1}{2}$ סתירה

כי $\det A\neq 0$

8. יהיו V,W מ"ו מעל F , $T,S:V\to W$ טו"ל ו- $U\subseteq W$ ת"מ. אם:

$$\operatorname{Im}S\cap U=\{0\} \qquad \operatorname{Im}T+U=W$$

אזי מתקיים $\nu(T)\le\nu(S)$ $(\nu=\dim Ker)$

נכון

הר)

(1) $\operatorname{Im}T+U=W$ (2) $\operatorname{Im}S\cap U=\{0\}$ (3) $\dim\operatorname{Im}S\le\dim\operatorname{Im}T$ כי

$\dim\operatorname{Im}T\ge\dim W-\dim U$ (1) ; $\dim\operatorname{Im}S\le\dim W-\dim U$ (2) לפי משפט:

$\dim\operatorname{Im}T+\dim\ker T=\dim V$; $\dim\operatorname{Im}S+\dim\ker S=\dim V$ $\Leftarrow$

$\Leftarrow$ $\dim\operatorname{Im}T+\dim\ker T=\dim\operatorname{Im}S+\dim\ker S$ ו

$\dim\ker T\le\dim\ker S$ נובע (3) מ

9. יהי n טבעי כלשהוא, $F=Z_{31}$ שדה השאריות בחילוק ב- 31 ו- $A\in M_n(F)$. אם לכל $b\in F^{(n)}$ למערכת המשוואות $(A|b)$ יש פחות מ- 10 פתרונות, אזי לכל b יש למערכת הנ"ל לפחות פתרון אחד.

נכון

$n=\operatorname{rk}A$ כי אם בנוסף $n>\operatorname{rk}A$ אז קיימת מערכת שאמה ל A מכילה שורה אפסים, ולכל $b=\begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$ יש למערכת מינל לפחות זה פתרון $x=0$. אז בצורה המדורגת ובו סעיר הכי קטנה בלי שורה של A תמיד יש אחת לפחות ~~[illegible]~~ $\operatorname{rk}A=n$ בלומר צה אומר שלכל b שני דרכים הכי פחות אותן לפחות המוגדר עליהן $x_1=b_1$ ... $x_n=b_n$ כ b_i מתקבלים אחרי פירוש ולכן משמעה הפרכים שלהם כי ~~[illegible]~~ בכל שורה של A יש מדרגת לפחות אחת שונה מ מטריצה המדורגת של A

ואי אפשר מרחב הפתרונות של מערכת הומוגנית אז $\dim U=n-\operatorname{rk}A$ $\ge n-(n-1)=1$

ויש בבסיס של U לפחות וקטור 1 $\Leftarrow$ ב U לפחות 31 וקטורים

לשימוש הבודקים בלבד:

סה"כ	9	8	7	6	5	4	3	2	1
85	8	8	7	8	8	15	15	17	15

1 טו) נתון כי $\{v_i\}$ בסיס ת"ל מקסימלי. זה אומר
שלכל וקטור $v \in V$ מתקיים שוקטורים $v, \{v_i\}$
תלויי קו, כלומר קיימים $\beta \in F$, $\beta \neq 0$, $\{\alpha_i\}$ (סקלרים) כאלה ש מתקיים

$$\beta v + \sum_i \alpha_i v_i = 0 \iff v = \sum_i \frac{\alpha_i}{\beta} v_i$$

? לא $\beta = 0$

כלומר לכל $v \in V$ מתקיים שיש הצגה קומבינציה
לינארית של וקטורים מ $\{v_i\}$ $\Leftarrow$ $\{v_i\}$ פורש
1 ג) נוסף כי $\{v_i\}$ פורש מינימלית. כלומר בשלילה
ש $\{v_i\}$ לא ב"ת. אזי קיימים $\{\alpha_i\} \in F$ לא כולם $\alpha_i = 0$
ש מתקיים:

$$\sum \alpha_i v_i = 0.$$

נבחר j_0 כך שקואפיציינט שלו בסכום הנ"ל
שונה מ 0: $\alpha_{j_0} \neq 0$. אזי מתקיים

$$v_{j_0} = \sum_i \frac{\alpha_i}{\alpha_{j_0}} v_i$$

מזה נובע שאפשר להסיר את v_{j_0} מדבר $\{v_i\}$
והיא תישאר פורשת: כי לכל $v \in V$ מתקיים

$$v = \sum_i \alpha_i' v_i + \alpha_{j_0}' v_{j_0} = \sum_i \alpha_i' v_i + \alpha_{j_0}' \cdot \sum_i \frac{\alpha_i}{\alpha_{j_0}} v_i =$$

$$= \sum_{i \neq j_0} \left(\alpha_i' + \alpha_{j_0}' \frac{\alpha_i}{\alpha_{j_0}}\right) v_i = \sum_{i \neq j_0} \beta_i v_i, \quad \forall i: \beta_i = \left(\alpha_i' + \alpha_{j_0}' \frac{\alpha_i}{\alpha_{j_0}}\right)$$

α_{j_0}' הינם קואפיציינטים בפירוק של v.
(לא בוודאי שווים ל α_i)

כלומר מצאנו לכל $v \in V$ הצגה כסכום
של וקטורים מ $\{v_i\}/v_{j_0}$. כי וקטורים של $\{v_i\}$ חוץ מ v_{j_0}
אינה נותן ש $\{v_i\}$ אינה פורשת מינימלית
וכבר נסתיר זה. $\Leftarrow$ $\{v_i\}$ פורשת מינימלית

סוגים

$\{v_i\}$ מתון ר"ב $\to$ $\{\tilde{v}_i\}$ מקיים

$\prod \ldots \cdot a_{j_0 1} a_{j_0 2}$

$\prod b_{i_0 1} b_{j_0 2} =$

$a_{j_0 2}\, a_{j_0 1}$

$b_{j_0 2} = a_{i_0 1}$

$b_{i_0 1} = a_{j_0 2}$

$a_{12}\, a_{11}$ $\quad \delta(i_0) =$

a_{22}

a

$a_{i_0 1}$ $a_{j_0 2}$

$+ a_{11} \cdot a_{12}$

$a_{11}\, a_{22}$

$\operatorname{sgn}\delta$ $\quad a_{11}\, A_{11}$

$a_{j_0 1}$ $a_{i_0 2}$

$a_{11}\, a_{12}$ $\quad a_{11}$ $\quad a_{ij}$

$\operatorname{sgn}\delta \prod a_{11}\, a_{i\,\delta(i)}$

$\operatorname{sgn}\delta \prod b_{12}\, b_{i\,\delta(i)} = \prod a_{11}\, a_{i\,\delta(i)}$

$j_0 1 = i_0$ $\quad a_{j_0 2}$ $\quad \delta(1) = 2$ $\quad \delta(1) = 1$

$\delta(1) = 1$ $\quad \prod \ldots \cdot a_{j(1)1}\, a_{i(2)}$

$b_{j_0 1} = a_i$

$$\operatorname{sgn}\delta' \prod_{i=1}^{n} b_{i\,\delta'(i)} = \operatorname{sgn}\delta' \prod_{i=1}^{n} a_{i\,\delta'(i)} = \prod_{i=1}^{n} a_{i\,\delta'(i)} \cdot$$

для каждой перестановки δ' $\quad \cdot a_{j_0 1} \cdot a_{j_0 2}$

$\delta(j_0) = 1$

$\delta(i_0) = 2$

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}$$ פיתרון (ב2

$$\det B = \sum_{\sigma' \in S_n} \operatorname{sgn}\sigma' \prod_{i=1}^{n} b_{i\sigma'(i)}$$

לכל פעם $\prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}$ קיים פעם $\prod_{i=1}^{n} b_{i\sigma'(i)}$

עם הגדרת אותם הסלמנטים של מטריצה כי

רק התלפנו שורות ב A כפי לך בל B)

(נתון לרשום אות הפעלים הנ"ל בצורה

$$A = \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)} = \Big(\prod_{\substack{i=1\\ i\neq i_0\\ i\neq j_0}}^{n} a_{i\,\sigma(i)}\Big) \cdot a_{i_0 1}\, a_{j_0 2}$$

$$B = \prod_{i=1}^{n} b_{i\sigma'(i)} = \Big(\prod_{\substack{i=1\\ i\neq i_0\\ i\neq j_0}}^{n} b_{i\sigma'(i)}\Big) b_{j_0 1}\, b_{j_0 2}$$

כי תמורה ה הינה "על" קבוצה $\{1 \dots n\}$ כלומר

מתקיים $\forall i$ קיים j כך ש $\sigma(j) = i$.

אבל מהגדרה של הכפלת הנ"ל

$$\prod_{\substack{i=1\\ i\neq i_0\\ j\neq j_0}}^{n} a_{i\sigma(i)} = \prod_{\substack{i=1\\ i\neq i_0\\ j\neq j_0}}^{n} b_{i\sigma'(i)}, \qquad a_{i\sigma(i)} = b_{i\sigma'(i)},$$

$$\forall i,j : i \neq i_0,\ j \neq j_0,\quad 1 \le i,j \le n$$

$$1 \cdot a_{i_0 1}\, a_{j_0 2} = b_{i_0 1}\, b_{j_0 2} \quad (1)$$ כי התלפנו שורות

1 ו 2. כל פיתר שורות השאירנו במקומן

אבל $\sigma'(i)$ פועלת בדיוק כמו $\sigma(i)$ על כל הסלמנטים

$\delta'(\delta)$

i_0	j_0
2	1

של ההפכה הנ"ל ומחליפה במקומות
(ביחס למקומות שלהם ב σ) זוג
אות אלמנטים $a_{i_0 1}$ ו $a_{j_0 2}$, כלומר
$b_{j_0 1} = a_{j_0 2}; b_{i_0 2} = a_{i_0 1}$ (1) מ

$$\sigma'(j_0) = 1 \quad \sigma^{-1}(j_0) = 2$$
$$\sigma'(i_0) = 2 \quad \sigma(i_0) = 1$$

אולם ברור ש $\operatorname{sgn}(\sigma') = -\operatorname{sgn}(\sigma)$

$$\operatorname{sgn}(\sigma')\prod_{i=1}^{n} b_{i\sigma(i)} = -\operatorname{sgn}(\sigma)\prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}$$

ואולם בסכום

$$\det B = \sum_{\sigma' \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma')\prod_{i=1}^{n} b_{i\sigma'(i)} = -\sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma^{-1}(i)} = -\det A, \quad \boxtimes$$

כי יש בדיוק כמה לפרק לשני אלמנטים
שאותם היו מחליפה במקומות ביחס
למקומות שלהם ב σ, כלומר

כמו בעל אלגברמות הבאות:

σ: $1\ 2 \ldots n$ ל $1\ 2 \ldots n$
j_0 i_0 צהוב i_0 j_0 צהוב

ומכאן שכל החלפה גורמת הפכה של sgn
ל -1 נותן ש $\operatorname{sgn}\sigma' = -\operatorname{sgn}\sigma$.

מכאן נובע הלמה

ש טרון

2 ג)

$\det E_{ij}A = -\det A$

$\det E_i(\lambda)A = \lambda \det A$

$\det E_{ij}(\lambda)A = \det A$

מ"ל

2 ב) אם A הפיכה אז ניתן לפרק אותה באופן כפולות אלמנטריות והמטריצה מדוע? שיש את כתיבה שלה בפירוש היא I. נקבל

$$E_n \dots E_1 A = I \Leftrightarrow A = E_1^{-1} \dots E_n^{-1} I$$

כי מטריצות של פעולות אלמנטריות הפיכות הפכן כי פעולות עצמיות הפיכות. אז לפי סיף ב' 1 עובדה ש

$$\det A = \det E_1^{-1} \dots E_n^{-1} I$$

נקבל ש $\det A \neq 0$ כי $\det I = 1$ והכפלה של I על מטריצה שלא כפולה אלמנטרית מכפלה אותה בתרמינטה שלה שלא על סקלר שונה מאפס אז לא יכול להיות ש $\det A = 0$.

אם $\det A \neq 0$ אז נקרא שוב את A ונניח בשלילה שם D צורה המדורגת של A יש שורת אפסים, כלומר ש A לא הפיכה. אז $\det D = 0$ ו

$$\det A = \det E_1^{-1} \dots E_n^{-1} D$$

שכמו קודם ניתן להבין שהכפלה על E_i^{-1} מכפלה שאת הדטרמינטה של D על סקלר שונה מאפס מצה נותן שגם $\det A = 0$ בסתירה לכך הנחנו $\det A \neq 0$ ⇐ A הפיכה.

סעיף

$$2(\lambda-1)x_1+(1-\lambda)x_2+(\lambda+1)x_3=\lambda$$

$$\begin{matrix} 2(\lambda-1) & (1-\lambda) & \lambda+1 & \lambda \\ 2(\lambda-1) & (1-\lambda) & 0 & \lambda-1 \\ (2-\lambda-\lambda^2) & \lambda^2-1 & -(1+\lambda^2) & -\lambda \end{matrix} \sim$$

$\lambda=1$

$$\begin{pmatrix} 2(\lambda-1) & (1-\lambda) & \lambda+1 & \lambda \\ 0 & 0 & -(\lambda+1) & -1 \\ 2-\lambda-\lambda^2 & (\lambda-1)(\lambda+1) & -(1+\lambda^2) & -\lambda \end{pmatrix} \sim$$

$-\lambda-1=$ $\lambda=1$

$\cdot(-(\lambda-1)(\lambda+2)$

$-(\lambda+1)x_3=-1$

$x_3=\frac{1}{\lambda+1}$

$\frac{}{2}\cdot\lambda+2$

$$\begin{pmatrix} 2(\lambda-1) & (1-\lambda) & (\lambda+1) & \lambda \\ 0 & & & \\ 0 & 0 & -(\lambda+1) & -1 \end{pmatrix}$$

$\frac{2-\lambda-\lambda^2}{2}+\lambda^2-1$

$=-(\lambda^2+\lambda-2)=-(\lambda-1)(\lambda+2)$

$1+8=9$

$x_1=\frac{-1+3}{2}=1$

$x_2=\frac{-1-3}{2}=-2$

מבוא $\frac{\lambda^2}{2}+\frac{3}{2}\lambda+\cancel{1}-\cancel{\lambda}-\lambda^2$

$$\cancel{\begin{pmatrix} 2(\lambda-1) & (1-\lambda) & \lambda+1 & \lambda \\ 2(\lambda-1) & (1-\lambda) & 0 & \lambda-1 \end{pmatrix}}$$

$$\frac{1}{2}(\lambda+1)(\lambda+2)-(1+\lambda^2)=$$

$$\begin{pmatrix} 2(\lambda-1) & (1-\lambda) & \lambda+1 & \lambda \\ -(\lambda-1)(\lambda+2) & \lambda^2-1 & -(1+\lambda^2) & -\lambda \\ 0 & 0 & -(\lambda+1) & -1 \end{pmatrix}=$$

$(\lambda-1)(\lambda+1)$

$$\frac{1}{2}(1-\lambda)(\lambda+2)+\lambda^2-1=$$

$$\frac{1}{2}\cdot(\lambda+2) \qquad =(\lambda-1)\left(-\frac{1}{2}(\lambda+2)+\lambda+1\right)$$

$$=(\lambda-1)\left(\frac{1}{2}\lambda\right)$$

$$\begin{pmatrix} 2(\lambda-1) & (1-\lambda) & \lambda+1 & \lambda \\ 0 & (\lambda-1)\left(\frac{1}{2}\lambda\right) & \left(-\frac{\lambda^2}{2}+\frac{3}{2}\lambda\right) & \frac{1}{2}\lambda(\lambda+1) \\ 0 & 0 & -(\lambda+1) & -1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 2(\lambda-1) & (1-\lambda) & \lambda+1 & \lambda \\ 0 & (\lambda-1)\lambda & \lambda(3-\lambda) & \lambda(\lambda+1) \\ 0 & 0 & -(\lambda+1) & -1 \end{pmatrix} \sim$$

$$-\lambda+\frac{\lambda(\lambda+2)}{2}=\frac{1}{2}\lambda($$

$3-\cancel{\lambda}+\cancel{\lambda}+1$

$$\lambda-1\frac{1}{2}\lambda=$$

$$\begin{pmatrix} 2(\lambda-1) & 0 & 4 & 2\lambda+1 \\ 0 & (\lambda-1) & (3-\lambda) & \lambda+1 \\ 0 & 0 & -(\lambda+1) & -1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c|c} 2(\lambda-1) & 0 & 4 & 2\lambda+1 \\ 0 & (\lambda-1) & 4 & \lambda+2 \\ 0 & 0 & -(\lambda+1) & -(\lambda+1) \end{array}\right)$$

$$x_3 = \frac{1}{\lambda+1} \qquad \frac{4}{\lambda+1} =$$

$$x_2 = \frac{\lambda+2-4\frac{1}{\lambda+1}}{\lambda-1} = (\lambda+2)(\lambda+1)-4 \;;$$

$$x_3 =$$

$$-1x_2 = 2-4$$

$$-1x_1 + 4 = 1$$

$$x_3 = \frac{1}{3}$$

$$x_3 = 1 \qquad x_2 = 4 - \frac{4}{3}$$

$$2x_1 - x_2 - 1x_3 = 0$$

2016

$\alpha 1$

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $1 \to 0$

$9 + 9x + 6 - 9x$

$\begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$ $1 + x \to 1$

$2 + 3x \to 3$

P^{-1}

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ $U \downarrow E$

$\cancel{2+3x}$ $-$

$3(1+x) - (2+x3)$

$3v_1 - v_2$

det $= 1$

$3 + 4x$

$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

$\alpha(1+x) + \beta(2+3x) = 3$

$\alpha + 2\beta + \alpha + 3\beta(x) = 3$

P $E \to U$ $\alpha + 3\beta = 0$

P $U \to E$ $\alpha = -3\beta$

$\begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$ 1 $-\beta = 3$ $\beta = -3$

$\alpha = 9$

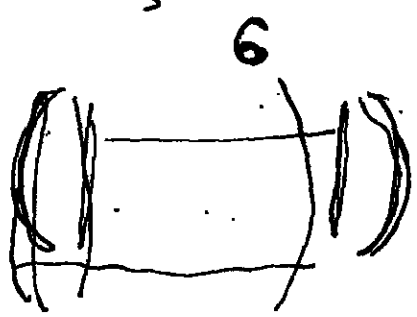
סיום

$$\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \end{pmatrix}$$

$A \in M_{5\times 6}(F)$

$\begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_5 \end{pmatrix}$



$A' \cdot A = 2A \cdot A^t$

$(A^t)^{-1} = A$

$A' = 2A A^t A^{-1}$

$\dim \operatorname{Im} S \le \dim \operatorname{Im} T$

$\Downarrow$

$\dim \operatorname{Im} T + \dim \ker T = \dim$

$T : V \to W$

$S : V \to W$

$\operatorname{Im} S \cap U = \{0\}$

$\operatorname{Im} T + U = W$

$U \le W$

$\nu(T) \le \nu(S)$ $\quad \dim \ker T \le \dim \ker S$

$\dim \operatorname{Im} T + \dim U = \dim W$

$\dim \ker T + \dim \operatorname{Im} T = \dim V$

$\dim S + \dim U \le \dim W$

$\lambda^2+2\lambda+\lambda+2$

$A|B$

$A|B$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & & & \\ & \ddots & & \\ & & a_{nn} & b_n \end{array}\right)$$

$a_{nn} = b_n$

$3)$

$a_{nn} \quad b_{nn}$

0

$0 \quad \cdot \quad 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} & & & \\ & & & \\ & & 1\ 1 & 0 \end{array}\right)^n \Rightarrow \underline{3\ 1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & & & \\ & & & \\ & & a & \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & & \\ 0 & & & \\ & & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} & & & \\ & & & \\ & & & 1 \end{array}\right)$$

$D =$

$-(x-1)(x+2)$

$-(\lambda^2+\lambda-2)$

$D = 1+8 = 9$

$b_1 = \frac{-1+3}{2} = 1$

$b_2 = -2$

det

$\frac{1}{2}\det^2 A = 9$

סיכום

$$\begin{pmatrix} 2(\lambda-1) & (1-\lambda) & \lambda+1 & \lambda \\ 2(\lambda-1) & (1-\lambda) & 0 & \lambda-1 \\ (1-\lambda)(\lambda+2) & \lambda^2-1 & -(1+\lambda^2) & -\lambda \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 2(\lambda-1) & (1-\lambda) & \lambda+1 & \lambda \\ 0 & 0 & -(\lambda+1) & -1 \\ 0 & (\lambda-1)\frac{\lambda}{2} & \frac{\lambda}{2}(3-\lambda) & \frac{\lambda}{2}(\lambda+1) \end{pmatrix}$$

$$(1-\lambda)(\lambda+2) + \frac{2\lambda-1\cdot\lambda+2}{2} \qquad \frac{\lambda+2}{2}$$

$$\lambda^2-1+\frac{(1-\lambda)\cdot(\lambda+2)}{2} = (\lambda-1)\left(\lambda+1-\left(\frac{\lambda}{2}+1\right)\right)$$

$$= (\lambda-1)\left(\frac{\lambda}{2}\right)$$

$$-(1+\lambda^2)+\frac{(\lambda+1)(\lambda+2)}{2} = \frac{-2-2\lambda^2+\lambda^2+3\lambda+2}{2} =$$

$$= \frac{-\lambda^2+3\lambda}{2} = \frac{\lambda}{2}(3-\lambda)$$

$$-\lambda+\frac{\lambda(\lambda+2)}{2} = \frac{\lambda}{2}(\lambda+2-1) = \frac{\lambda}{2}(\lambda+1$$

מחברת מס' 2
מתוך 11 מחברות

TEL AVIV UNIVERSITY אוניברסיטת תל-אביב

36

לפני התחלת הבחינה מלא את כל הפרטים הבאים בכתב ברור וקרא בעיון את ההוראות:

1. על הנבחן להיבחן רק בחדר שבו הוא רשום.
2. עם הכניסה לחדר הבחינה יש להניח את החפצים בצד לרבות מכשירי קשר ואמצעי תקשורת אחרים כשהם כבויים.
3. אסור להחזיק בהישג יד, בחדר הבחינה או בסמוך לו, כל חומר הקשור לבחינה/לקורס פרט לחומר שהשימוש בו הותר בכתב על ידי המורה.
4. יש למלא את הפרטים על מחברת הבחינה במקום המיועד לכך בלבד. אין לכתוב את השם או כל פרט מזהה אחר בתוך המחברת.
5. יש להישמע להוראות המשגיח. נבחן לא יעזוב את מקומו ללא קבלת רשות המשגיח. הפונה בשאלה או בבקשה ירים את ידו.
6. נבחן שנכנס לחדר הבחינה וקיבל את השאלון (טופס הבחינה) לידו ייחשב כמי שנבחן במועד זה. היה והחליט לא לכתוב את הבחינה, לא יהא רשאי לעזוב את חדר הבחינה, אלא כעבור חצי שעה ממועד תחילתה ולאחר שהחזיר את המחברת והשאלון. ציונו בבחינה יהיה "0".
7. קריאת השאלון מותרת רק לאחר קבלת רשות המשגיח.
8. יש לכתוב את התשובות בעט, בכתב יד ברור ונקי. נבחן הבוחר לכתוב טיוטה יעשה זאת בעמודו הימני של דפי מחברת הבחינה ויציין בראש העמוד "טיוטה". אין לתלוש דפים מהמחברת.
9. מחברות הבחינה שקיבל הנבחן תהיינה בפיקוחו ובאחריותו במשך כל הבחינה. בעת יציאה מן החדר יופקדו המחברות והשאלון בידי המשגיח.
10. בתום הבחינה יחזיר הנבחן את המחברות והשאלון ויקבל מידי המשגיח את כרטיס הנבחן.
11. הנוהג בניגוד להוראות ול"נוהל סדרי בחינות ודיווח ציונים" צפוי להפסקת בחינתו ואף להעמדה לדין משמעתי.
12. אין לכתוב מעבר לקו האדום משני צידי הדף.

בהצלחה.

לשימוש המורה הבוחן:

הציון _____

המחברת נבדקה ביום _____

חתימת המורה _____

תאריך הבחינה 21/9/04

שם הקורס אלגברה לינארית

שם המורה יהודה שלום

החוג/המגמה מתמטיקה

מס' זיהוי
(העתק מכרטיס הנבחן/התלמיד)

64076

מבוא

$$\begin{pmatrix} 2(\lambda-1) & (1-\lambda) & \lambda+1 & \lambda \\ 0 & (\lambda-1) & (3-\lambda) & (\lambda+1) \\ 0 & 0 & -(\lambda+1) & -1 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 2(\lambda-1) & 0 & 4 & 2\lambda+1 \\ 0 & \lambda-1 & 3-\lambda & \lambda+1 \\ 0 & 0 & -(\lambda+1) & -1 \end{pmatrix} \qquad 2\lambda+1-\frac{4}{\lambda+1}$$

$$\downarrow \qquad \frac{\cdot 4}{\lambda+1}$$

$$\begin{pmatrix} 2(\lambda-1) & 0 & 0 & 2\lambda+1-\frac{4}{\lambda+1} \\ 0 & (\lambda-1) & 0 & A \\ 0 & 0 & (-\lambda+1) & -1 \end{pmatrix}$$

סיכום

$1 \quad x$

$-2 \quad 1$

$1 \to 0$

$x \to 1$

$x = \alpha(1+x) + \beta(2+3x)$

$x = (\alpha + 2\beta) + (\alpha + 3\beta)x$

$v_1 \to 1$

$v_2 \to 3$

$\alpha = -2\beta$

$\beta = 1$

$\alpha = -2$

$9 + \cancel{9x} - 6 - \cancel{9x} = 3$

$3 - 2 = 1$

$-3 + 6 \qquad -6 + 9$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -9 & 6 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ \end{pmatrix}$$

$p \quad E \to U$

1

$\begin{pmatrix} 3 \\ \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

20/10

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$=$$

$$\boxed{u \to E : \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}}$$

$$\boxed{E \to u \qquad \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & \\ & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \Big($$

תרגיל

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \Big($$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{1+\frac{2}{3}} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \to \Big(\to \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1\frac{2}{3} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \to$$

$$\Big(\to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} \frac{7}{5\cdot 3} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = 2+3x - 2+2x = x$$

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{5\cdot 3} = \frac{7}{5\cdot 3}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

פתרון

1 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

$$\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{22} & A_{21}^{-1} \\ -1A_{12} & A_{11} \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 9 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\downarrow \quad = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \underline{\underline{\{\}}}$$

מבוא

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$0 \cdot 0$

$$= \begin{pmatrix} 0 + 0 \cdot a \\ 0 + 0 \end{pmatrix}$$

$0 \cdot$

$0 \cdot 1 = 0$

$(1+1) \cdot 1 = 1+1 = 0$

$1 + 1 = 0$

$-1 \cdot a + a = b$

$1 \cdot a = a$

$0 \cdot a$

$0 \cdot a + 0 \cdot a$

$-1 \cdot a = -a$

$a + a =$

$0 \cdot a =$

$0a = 0$

$-1 \cdot a$

$(1+1)a = \cancel{a^2 + -aa}$

$-1a + a =$

$= a - a = 0$

$a(-1+1) = 0$

$-1 \cdot a$

$0a$

$0(a + -a)$

$0 \cdot a$

$0 \cdot a -$

$-1 \cdot a + a =$

$= a(-1+1) = a \cdot 0$

A-67

סמסטר א' תשס"ה. מועד א'

תאריך הבחינה: 01.02.2005

מבחן באלגברה לינארית 1

שם המרצה: פרופ' אלסקר שמיון

שם המתרגלים: אסף הדרי, קובי קרמניצר

יש לענות על כל השאלות. אין להשתמש בשום חומר עזר פרט למחשבונים.

משך הבחינה: 3.5 שעות.

בשאלות 1-4 יש לכתוב את התשובות הסופיות בלבד בעמוד הראשון של המחברת.

בשאלה 5 יש לכתוב את ההוכחות המלאות בדפים 2-4 של המחברת.

שאלה 1.

(11) (א) לחשב את דרגת המטריצה עבור כל פרמטר λ ממשי:

$$A=\begin{bmatrix} 7-\lambda & -12 & 6 \\ 10 & -19-\lambda & 10 \\ 12 & -24 & 13-\lambda \end{bmatrix}.$$

בחרו אחת מהתשובות הבאות:

(a) $rkA=3$ לכל λ. (b) $rkA=\begin{cases} 3, \lambda \neq 1,5,-5 \\ 2, \lambda = 1 \\ 1, \lambda = 5,-5 \end{cases}$. (c) $rkA=\begin{cases} 3, \lambda \neq 1,5,-5 \\ 2, \lambda = 1,5,-5 \end{cases}$.

(11)(ב) לפטור את המערכת

$$\begin{cases} x_1+2x_2+\ldots+nx_n=b_1 \\ 2x_1+3x_2+\ldots(n+1)x_n=b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ nx_1+(n+1)x_2+\ldots+(2n-1)=b_n \end{cases}.$$

בחרו אחת מהתשובות הבאות:

(a) אם קיימים $2 \le i,j \le n$ כך ש- $b_i-b_{i-1} \neq b_j-b_{j-1}$ אז אין פתרון. אחרת

$$\begin{cases} x_1=(2b_2-3b_1)+\sum_{i=3}^{n}(i-2)x_i \\ x_2=(2b_1-b_2)-\sum_{i=3}^{n}(i-1)x_i \end{cases}$$

כאשר $x_3,\ldots,x_n$ מספרים כלשהם.

(b) אם קיימים $2 \le i,j \le n$ כך ש- $b_i-b_{i-1} \neq b_j-b_{j-1}$ אז אין פתרון. אחרת

$$\begin{cases} x_1=(2b_2-3b_1)-\sum_{i=3}^{n}(i-2)x_i \\ x_2=(2b_1-b_2)+\sum_{i=3}^{n}(i-1)x_i \end{cases}$$

כאשר $x_3,\ldots,x_n$ מספרים כלשהם.

(c) $x_i=ib_i-(i-1)$ לכל $1 \le i \le n$.

שאלה 2.

(11)(א) יהי U,V,W תתי-מרחבים ליטאריים של מ"ו L נוצר סופית. אילו מהטענות הבאות נכונות:

(1) $(U+V)\cap W=(U\cap W)+(V\cap W)$. (2) $(U\cap V)^*=U^*+V^*$.

בחרו אחת מהתשובות הבאות:

(a) (1). (b) (2). (c) שתיהן נכונות. (d) שתיהן לא נכונות.