הוכחות הדרושות למבחן באלגברה א'

שקילויות של מטריצה ריבועית

משפט 0.1 תהי A מטריצה ריבועית, אזי כל הנ"ל שקולים:

1. A הפיכה
2. למערכת $Ax = b$ יש פתרון לכל b
3. A שקולה ל-I
4. למערכת ההומוגנית $Ax = 0$ יש רק הפתרון הטרוויאלי.
5. A היא מכפלה של מטריצות אלמנטריות.

הוכחה:

- $(1) \Leftarrow (2)$: מניחים ש-A הפיכה. בהינתן המערכת $Ax = b$, נציב $x = A^{-1}b$:
$$A(A^{-1}b) = (AA^{-1})b = Ib = b$$
ולכן $x = A^{-1}b$
- $(2) \Leftarrow (3)$: ידוע שעבור כל b, למערכת $Ax = b$ יש פתרון. ידוע כי A שקולה למטריצה קנונית M. נוכיח כי $M = I$
  - נניח $M \neq I$. אזי יש ל-M שורת אפסים. לכן, במערכת $Mx = e_n$ אין פתרון. M שקולה ל-A ולכן ניתן לעבור מ-M ל-A על ידי מספר סופי של פעולות אלמנטריות. אם נפעיל את הפעולות הללו על $(M|e_n)$ נקבל $(A|b)$. ל-$Mx = e_n$ אין פתרון ולכן גם ל-$Ax = b$ אין פתרון וזו סתירה.
- $(3) \Leftarrow (4)$: ניח ש-A שקולה ל-I. נפתור את המערכת ההומוגנית $(A|0)$. מטריצה זו שקולה ל-$(I|0)$. קיבלנו מטריצה מורחבת של $Ix = 0$ ולכן למערכת זו יש רק הפתרון הטרוויאלי, ולכן גם ל-$Ax = 0$.
- $(4) \Leftarrow (3)$: נניח כי למערכת $Ax = 0$ קיים רק הפתרון הטר-וויאלי. תהיה M המטריצה הקנונית השקולה ל-A. אזי, הפתר-ונות של $Ax = 0$ הם הפתרונות של $Mx = 0$. אם $M \neq I$ אזי ל-M יש לפחות שורת אפסים אחת ולכן ניתן לבחור איבר חופשי ולמשוואה יש יותר מפתרון אחד, וזו סתירה.
- $(3) \Leftarrow (5)$ אם A שקולה ל-I אז ניתן לעבור מ-I ל-A על ידי פעולות אלמנטריות. כלומר, יש פעולות אלמנטריות $e_1, e_2, \ldots, e_k$ כך ש-$A = e_k(\ldots e_2(e_1(I)))$.
$$\begin{aligned} e_1(I) &= E_1 \\ e_2(e_1(I)) &= E_2E_1 \\ &\vdots \end{aligned}$$
ולכן נקבל $A = E_kE_{k-1}\ldots E_2E_1$ כאשר $E_i = e_i(I)$.
- $5 \Leftarrow (1)$ כל מטריצה אלמנטרית היא הפיכה. כפל של מטריצות הפיכות נותן מטריצה הפיכה.

■

עבור מטריצה ריבועית, הפיכות חד צדדית גוררת הפיכות

משפט 0.2 אם A הפיכה מימין או משמאל אז היא הפיכה

הוכחה:

1. נניח ש-A הפיכה משמאל, כלומר - קיים B כך ש-$I = BA$. נראה שלמערכת $Ax = 0$ יש רק הפתרון הטרוויאלי.
נניח x' הוא הפתרון של $Ax = 0$, אזי
$$\begin{aligned} Ax' &= 0 \\ B(Ax') &= B0 = 0 \\ Ix' &= 0 \\ x' &= 0 \end{aligned}$$
ולכן למערכת $Ax = 0$ יש רק הפתרון הטרוויאלי ולכן A הפיכה.
2. נניח ש-A הפיכה מימין, כלומר - יש C כך ש-$I = AC$. אזי $I = (AC)^t = C^tA^t$, ולכן, לפי סעיף (1), A^t הפיכה. ועל כן, היות והמטריצה המוחלפת של מטריצה הפיכה היא הפיכה, A היא הפיכה.

■

מטריצה הפיכה היא מכפלה של הפיכות

משפט 0.3 $A = A_1A_2\ldots A_n$ היא הפיכה $\iff$ כל A_i הפיכה.

הוכחה: בכיוון אחד: נניח כי A הפיכה.
$$\begin{aligned} A &= A_1A_2\ldots A_k \\ A^{-1}\left(A_1A_2\ldots A_k\right)^{\dagger} &= I \\ \left(A^{-1}A_1A_2\ldots A_{k-1}\right)A_k &= I \end{aligned}$$

A_k הפיכה משמאל ולכן הפיכה.

נכפול את † מימין ב-A_k^{-1} ומשמאל ב-A_k
$$\begin{aligned} A_kA^{-1}A_1\ldots A_{k-1}A_kA_k^{-1} &= A_kIA_k^{-1} = A_kA_{k-1}I \\ \left(A_kA^{-1}A_1\ldots A_{k-2}\right)A_{k-1} &= I \end{aligned}$$

ולכן A_{k-1} הפיכה משמאל ולכן הפיכה ונמשיך באינדוקציה.

בכיוון שני:

נניח $A = A_1A_2$ ו-A_1, A_2 הפיכות. אזי
$$\begin{aligned} A &= A_1A_2 \\ AA_2^{-1} &= A_1A_2A_2^{-1} \\ AA_2^{-1} &= A_1I = A_1 \\ AA_2^{-1}A_1^{-1} &= A_1A_1^{-1} = I \\ A(A_2^{-1}A_1^{-1}) &= I \end{aligned}$$

A הפיכה מימין ולכן הפיכה. ומכאן - באינדוקציה. ■

קבוצות פורשות

משפט 0.4 אם $\{v_1,\dots,v_n\}$ בת"ל ו-$\{w_1,\dots,w_m\}$ פורשת את V אזי $m \ge n$.

הוכחה: ניתן להניח שכל v_i שונים מאפס.

נביט בקבוצה $\{w_1, v_1, v_2, \dots v_n\}$.

$\{v_1,\dots,v_n\}$ קבוצה פורשת, ולכן w_1 הוא קומבינציה לינארית שלהם, ולכן $\{w_1, v_1, v_2, \dots v_n\}$ היא קבוצה תלויה לינארית.

היות והקבוצה תלויה לינארית, יש בה וקטור שהוא קומבינציה לינארית של הקודמים לו (לא יתכן כי $w_1 = 0$ כי w_1 הוא מקבוצה בת"ל). נניח שזהו v_j. היות ו-v_j הוא קומבנציה לינארית של הקודמים לו, גם אם נוריד את v_j הקבוצה תשאר פורשת. כלומר, $\{w_1, v_1, \dots, \underbrace{v_j}, \dots v_n\}$(ללא האבר ה-$v_j$) היא קבוצה פורשת.

נביט בקבוצה $\{w_2, w_1, v_1, \dots, \underbrace{v_j}, \dots v_n\}$. קבוצה זו תלויה לינארית, מאותו שיקול כמו בסעיף הקודם. מהטענה הקודמת, יש וקטור בקבוצה שהוא קומבינציה לינארית של קודמיו.

וקטור זה אינו w_1, משום שלפי הנתון, w_1 אינו תלוי ב-w_2. לכן, זהו v_i כלשהו. כלומר, $\{w_2, w_1, v_1, \dots, \underbrace{v_j}, \dots \underbrace{v_i} \dots v_n\}$ ו-v_i הוא קומבינציה של האחרים. אזי $\{w_2, w_1, v_1, \dots, \underbrace{v_j}, \dots \underbrace{v_i} \dots v_n\}$ גם היא פורשת.

נניח בשלילה כי $m < n$. אחרי n צעדים, נקבל קבוצה $\{w_1, w_2, \dots, 2_n\}$ שהיא פורשת - כלומר, w_{n+1} הוא צירוף לינארי של הקודמים לו, וזו סתירה לכך ש-$\{w_1,\dots,w_m\}$ בת"ל ולכן $n \le m$. ■

יחידות המימד

משפט 0.5 במרחב בעל בסיס סופי, לכל בסיס יש אותו מספר איברים.

הוכחה: נניח שגם $\{w_1,\dots,w_m\}$ וגם $\{v_1,\dots v_m\}$ בסיסים.

אזי $\{v_1,\dots,v_n\}$ בסיס ולכן פורשת ו-$\{w_1,\dots,w_m\}$ בסיס ולכן בת"ל ולכן $m \le n$.

כמו כן, $\{w_1,\dots,w_m\}$ בסיס ולכן פורשת ו-$\{v_1,\dots,v_n\}$ בסיס ולכן בת"ל ולכן $n \le m$.

ולכן $m = n$. ■

מימד מרחב השורות שווה למימד מרחב העמודות

משפט 0.6 תהיא $A \in F^{m \times n}$. אזי מימד מרחב השורות של A שווה למימד מרחב העמודות של A.

הוכחה: נסמן ב-r את דרגת A (כלומר, r הוא מימד מרחב השורות).

תהיא M המטריצה הקנונית ששקולה ל-A. יש בה r שורות $(r \neq)$.

האחדים המובילים נמצאים במקומות $j_1 < j_2 < \dots < j_r$ כאשר העמודות $j_1,\dots,j_r$ של M הן:

$$\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\\vdots\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\\vdots\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\\0\vdots\\0\end{pmatrix}$$

כאשר האחד האחרון הוא במקום ה-r. עמודות אלו בלתי תלויות לינארית. נזכור שלכל j העמודה ה-n-ית במטריצה M היא Me_j . כאשר $e_1,\dots,e_n$ הבסיס הסטנדרטי של F^n.

כלומר, הקבוצה $\{Me_{j1},\dots,Me_{jr}\}$ בת"ל.

נזכור שהעובדה ש-A שקולת שורות ל-M פירושה שקיימת מטריצה הפיכה E (היא מכפלה של מטריצות אלמנטריות) עבורה $A = EM$. לכן, מהעובדה ש-$\{Me_{j1},\dots,Me_{jr}\}$ נובע כי $\{Ae_{j1},\dots,Ae_{jr}\}$ בת"ל.

לכן, מימד מרחב העמודות של $A \le r$.

את אותו טיעון ניתן להפעיל על A^t ולכן מימד מרחב העמודות שווה ל-r. ■

מימד מרחב הסכום

משפט 0.7 עבור $W_1, W_2 \subset V$,

$$\dim(W_1+W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$$

הוכחה: נניח

$$\begin{aligned}\dim W_1 &= n\\ \dim W_2 &= m\\ \dim(W_1 \cap W_2) &= k\end{aligned}$$

נבחר בסיס ל-$W_! \cap W_2$: $\{v_1,\dots v_k\}$.

מכיוון ש-$W_1 \cap W_2$ תת מרחב של W_1 ניתן להשלים את $\{v_1,\dots,v_k\}$ לבסיס של W_1 : $\{v_1,\dots,v_k,w_1,\dots,w_{n-k}\}$.

באופן דומה, ניתן להשלים את $\{v_1,\dots,v_k\}$ לבסיס של W_2 : $\{v_1,\dots,v_k,u_1,\dots,u_{m-k}\}$.

נתבונן בקבוצה $B = \{v_1,\dots,w_1,\dots,w_{n-k},u_1,\dots,u_{m-k}\}$. מספר האיברים בה הוא $m+n-k$. נוכיח כי B בסיס ל-W_1+W_2.

1. B פורשת את W_1+W_2
   יהי $v' \in W_1, v'' \in W_2$.

$$\begin{aligned}v'+v'' &= (\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k + \alpha_{k+1} w_1 + \dots \alpha_n w_{n-k})\\ &+ (\beta_1 v_1 + \dots + \beta_k v_k + \beta_{k+1} u_1 + \dots \beta_m w_{m-k})\\ v'+v'' &\in \text{span} B\end{aligned}$$

ולכן B פורשת את מרחב הסכום

2. B בלתי תלויה לינארית.

נניח ש-

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha_1 v_1 + \dots \alpha_k v_k + \beta_1 w_1 + \dots + \beta_{n-k} w_{n-k} \\ &+ \gamma_1 u + \dots + \gamma_{m-k} u_{n-k} \end{aligned}$$

נעביר אגפים ונקבל ש-

$$\begin{aligned} W_1 &\ni (\beta_1 w_1 + \dots + \beta_{n-k} + \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k) \\ &= -(\gamma_1 u_1 + \dots \gamma_{m-k} u_{m-k}) \in W_2 \end{aligned}$$

לכן $W_1 \cap W_2 \ni w_1 u_1 + \dots + v_{m-k} u_{m-k}$ וניתן לרשום אותו כך

$$\gamma_1 u_1 + v_{m-k} u_{m-k} = d_1 v_1 + \dots + d v_k$$

מכיוון ש- $\{u_1, \dots, u_{m-k}, v_1, \dots v_k\}$ בת"ל אזי בהכרח $\forall i : \gamma_i = 0$.

אם $\gamma_i = 0$ זה משאיר

$$\alpha_1 v_1 + \dots \alpha_j v_j = +\beta_! w_1 + \dots + \beta_{n-k} w_{n-k} = 0$$

אבל $\{v_1, \dots, v_k, w_1, \dots, w_{n-k}\}$ בסיס ולכן בת"ל ואז כל $\alpha, \beta = 0$ ולכן B בת"ל.

■

יחידות הטרנספורמציה

משפט 0.8 אם $\{v_1, \dots, v_n\}$ בסיס ל-V ו-$\{w_1, \dots, w_n\}$ קבוצה ב-W אז יש טרנספורמציה יחידה $T : V \to W$ שמעבירה v_i ל-w_i.

הוכחה: נגדיר $T : V \to W$ באופן הבא: ניתן $v \in V$ ונכתוב $v = c_1 v_1 + \dots c_n v_n$.

נגדיר $T : v = c_1 w_1 + \dots + c_n w_n$. נבדוק לינאריות, בעזרת $u, v \in V$

$$v = \sum_{i=1}^{n} c_i v_i \qquad , u = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$$

$$\begin{aligned} v + u &= \sum_{i=1}^{n} (a_i v_i + c_i v_i) \\ T(\alpha u + c) &= \sum_{i=1}^{n} ((d a_i + c_i) w_i) = \\ &= \sum_{i=1}^{n} (d a_i w_i + c_i w_i) = \\ &= d T(u) + T(v) \end{aligned}$$

נוכיח יחידות: נניח שגם $S : V \to W$ טרנספורמציה לינארית כך ש-$S(v_i) = W_i$. אם $v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$ אזי

$$\begin{aligned} S(v) &= S\left(\sum_{i=1}^{n} a_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i S(v_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i w_i = T(v) \end{aligned}$$

■

מימדים של טרנסופרמציה

משפט 0.9 $T : V \to U$ טרנסופרמציה לינארית. $\dim V = \dim \ker T + \dim \mathrm{Im} T$

הוכחה: יהי V מרחב וקטורי ממימד n. יהי $\{v_1, \dots v_k\}$ בסיס ל-$\ker T$. ($\dim \ker T = k$). אזי $\{v_1, \dots v_k\}$ בת"ל ב-v, כי הוא בסיס. לכן ניתן להשלים אותו לבסיס של V: $\{v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n\}$.

נוכיח כי $\{T(v_{k+1}), \dots, T(v_n)\}$ בסיס לתמונה של T.

- נבדוק האם $\{T(v_{k+1}), \dots, T(v_n)\}$ פורשת. יש להראות שכל איבר מהצורה $T(v)$ הוא צירוף לינארי שלהם.

  יהא $v \in V$.

$$\begin{aligned} v &= a_1 v_1 + \dots + a_k v_k + a_{k+1} v_{k+1} + \dots + a_n v_n \\ T(v) &= a_1 T(v_1) + \dots + a_k T(v_k) \\ &+ a_{k+1} T(v_{k+1}) + \dots + a_n T(v_n) \end{aligned}$$

  $\{v_1, \dots, v_k\}$ הם בגרעין של T ולכן התמונה שלהם הוא אפס. לכן נשאר

$$T(v) = a_{k+1} T(v_{k+1}) + \dots + a_n T(v_n)$$

  והקבוצה $\{T(v_{k+1}), \dots, T(v_n)\}$ פורשת.

- נבדוק אי-תלות

  נניח

$$\begin{aligned} c_{k+1} T(v_{k+1}) + \dots + c_n T(v_n) &= 0 \\ T(c_{k+1} v_{k+1} + \dots + c_n v_n) &= 0 \end{aligned}$$

  לכן $c_{k+1} v_{k+1} + \dots + c_n v_n$ נמצא בגרעין של T וניתן לכתוב אותו כצירוף לינארי של איברי הגרעין

$$\begin{aligned} a_1 v_1 + \dots + a_k v_k &= c_{k+1} v_{k+1} + \dots + c_n v_n \\ a_1 v_1 + \dots + a_k v_k - c_{k+1} v_{k+1} - \dots - c_n v_n &= 0 \end{aligned}$$

  זהו צירוף לינארי של איברי הבסיס של V ועל כן כל המקדמים שווים לאפס ולכן הקבוצה בת"ל.

■

הקשר בין מטריצות מייצגות לטרנספורמציות מבסיסים שונים.

משפט 0.10 תהי $T : U \to V$ טרנספורציה לינארית ו-B, B' בסיסים ב-V. אזי $[T]_{B'} = P^{-1} [T]_B P$ כאשר P היא מטריצת המעבר מ-B ל-B'.

הוכחה: יהי $v \in V$. אזי, קיימת $P [v]_{B'} = [v]_B$. על כן,

$$P^{-1} [T]_B P [V]_{B'} = P^{-1} [T]_B [b]_B = P^{-1} [T(v)]_{B'}$$

אבל $[T(v)]_{B'} = [T]_{B'} [v]_{B'}$. על כן, $P^{-1} [T]_B P [v]_{B'} = [T]_{B'} [v]_{B'}$.

מאחר וההעתקה $[v]_{B'} \mapsto v$ היא על K^n, יש לנו $P^{-1} [T]_{B'} P [v]_{B'} = [T]_{B'} [v]_{B'}$ לכל $x \in K^n$, על כן, $P^{-1} [T]_B P = [T]_{B'}$.

■

דטרמיננט של מטריצה שווה למינוס הדטרמיננט של מטריצה מוחלפת שורות.

משפט 0.11 תהא A מטריצה $n \times n$ ותהי B המטריצה שמתקבלת מ-A על ידי החלפת שורות i,j אז $|B| = -|A|$.

הוכחה: עבור $n=2$: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} |A| &= ad - bc \\ |B| &= cb - da \\ |B| &= -|A| \end{aligned}$$

נניח כי המשפט נכון לכל מטריצה מגודל $(n-1) \times (n-1)$. נוכיח את המשפט למטריצה בגודל $n \times n$.

תהא A מטריצה $n \times n$ ו-$1 \le i,j \le n$, $i \ne j$.

$$\begin{aligned} |A| &= a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + \ldots + a_{n1}A_{n1} \\ |B| &= b_{11}B_{11} + b_{21}B_{21} + \ldots + b_{n1}A_{n1} \end{aligned}$$

נקבע $k \ne i,j$. נביט על $b_{k1}B_{k1}$. אזי $b_{k1} = a_{k1}$.

$A_{k1} = (-1)^{1+k}|M_{k1}|$, $B_{k1} = (-1)^{1+k}|N_{k1}|$, כאשר N_{k1} מתקבלת מהחלפת צמד שורות ב-M_{k1}.

M,N הן מסדר $(n-1) \times (n-1)$ ולכן, לפי הנחת האינדוקציה, $|M_{k1}| = -|N_{k1}|$, ולכן $b_{k1}B_{k1} = -a_{k1}A_{k1}$.

עתה, נקבע כי $k = i,j$. נתבונן ב: $b_{k1}B_{k1} = b_{i1}B_{i1}$. אזי $b_{i1} = a_{j1}$.

$$\begin{aligned} |N_{i1}| &= (-1)^{j+i-1}|M_{j1}| \\ B_{i1} &= (-1)^{o+1}|N_{i1}| = (-1)^j|M_{j1}| = -A_{ji} \end{aligned}$$

ולכן, $b_{i1}B_{i1} = -a_{i1}A_{i1}$. באופן דומה מוכיחים גם עבור $k = j$.

$$\begin{aligned} |B| &= b_{11}B_{11} + b_{21}B_{21} + \ldots + b_{n1}A_{n1} = \\ &= -\quad a_{11}A_{11} - a_{21}A_{21} - \ldots - a_{n1}A_{n1} = -|A| \end{aligned}$$

■

דטרמיננט של מכפלה

משפט 0.12 $|AB| = |A| \cdot |B|$

הוכחה: נוכיח תחילה עבור מטריצות לא הפיכות:

אם אחת מהמטריצות A או B לא הפיכה אזי $|A||B| = 0$. כמו כן, מכפלת המטריצות אינה הפיכה, ולכן $|AB| = 0$. אזי, אם אחת מהמטריצות אינה הפיכה, $|AB| = |A||B|$.

עבור מטריצות הפיכות קיימות מטריצות אלמנטריות כך ש:

$$\begin{aligned} A &= E_1E_2\ldots E_k \\ B &= E'_1E'_2\ldots E'_m \\ AB &= E_1\ldots E_kE'_1\ldots E'_m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |A| &= |E_1E_2\ldots E_k| = |E_1||E_2\ldots E_k| \\ &= |E_1||E_2|\ldots|E_k| \\ |B| &= |E'_1||E'_2|\ldots|E'_m| \end{aligned}$$

זאת מתאפשר משום שדטרמיננטה של מכפלה של מטריצה אלמנטרית ומטריצה שווה למכפלת הדטרמיננטים ולכן,

$$|AB| = |E_1||E_2|\ldots|E_k||E'_1||E'_2|\ldots|E'_m| = |A||B|$$

■

הפיכות

משפט 0.13 A ריבועית הפיכה $\iff |A| \ne 0$

הוכחה: אם A לא הפיכה, אזי קיימת מטריצה מדורגת M ולה שורות אפסים המקיימת: $A = E_1E_2\ldots E_kM$. היות ו-$E_1,\ldots,E_k$ אלמנטריות, מתקיים: $|A| = |E_1||E_2|\ldots|E_k||M|$. ל-$M$ יש שורות אפסים ולכן הדטרמיננט שלה הוא אפס ומכפלת הדטרמיננטים כולה היא אפס.

נניח A הפיכה, אזי היא שקולת שורות למטריצתה היחידה וניתן לרשום אותה כ-$|A| = |E_1||E_2|\ldots|E_k||I|$. הדטרמיננט של מטריצה אלמנטרית או מטריצת יחידה אינו אפס ועל כן המכפלה כולה שונה מאפס.

■

הצמוד הקלאסי

משפט 0.14 $A(\text{adj}A) = |A|I$

הוכחה:

$$\begin{aligned} (A(\text{adj}A))_{ij} &= \sum_{k=1}^n a_{ik}(\text{adj}A)_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^n a_{ik}A_{jk}\begin{cases} 0 & i \ne j \\ |A| & i = j \end{cases} \end{aligned}$$

■

וקטורים עצמיים

משפט 0.15 וקטורים עצמיים ששייכים לערכים עצמיים שונים הם בת"ל.

כלומר, אם $\{v_1,\ldots,v_k\}$ קבוצה של וקטורים עצמיים של A כך ש-$Av_i = \lambda_i v_i$ וכל λ_i שונה מהאחרים, אז הקבוצה בת"ל.

הוכחה: נוכיח באינדוקציה על k.

$k=1$, v_1 וקטור עצמי. $Av_1=\lambda_1 v_1$, ולכן $v_1\neq 0$ ו-$\{v_1\}$ בת"ל.

נניח כי $\{v_1,\ldots,v_{k-1}\}$ בת"ל.

$$\begin{array}{rrcl}
 & c_1Av_1+c_2Av_2+\ldots+c_kAv_k & = & 0\\
(1) & c_1\lambda_1v_1+c_2\lambda_2v_2+\ldots+c_k\lambda_kv_k & = & 0\\
\\
(2) & c_1\lambda_kv_1+c_2\lambda_kv_2+\ldots+c_k\lambda_kv_k & = & 0
\end{array}$$

נחסיר את (2) מ-(1) ונקבל:

$$c_1(\lambda_1-\lambda_k)+\ldots c_{k-1}(\lambda_{k-1}-\lambda_k)v_{k-1}=0$$

מהנחת האינדוקציה, ידוע שהוקטורים $v_1,\ldots,v_k$ בת"ל. כמו כן, כל ה-$(\lambda_1-\lambda_k),\ldots,(\lambda_{k-1}-\lambda_k)$ שונים ולכן כל ה-c_i שווים לאפס. נציב במשוואה המקורית ונראה כי כל המקדמים הם אפס וכל כן $\{v_1,\ldots v_k\}$ בת"ל. ■

משפט 0.16 אם $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$ ערכים עצמיים שונים ו-B_i בסיס למרחב העצמי של λ_i אזי $B=\bigcup_{i=1}^k B_i$ בת"ל

הוכחה: נסמן:

$$\begin{array}{rcl}
B_1 & = & \left\{v_i^{(1)}, i=1,\ldots\right\}\\
\vdots & & \\
B_k & = & \left\{v_i^{(k)}, i=1\ldots\right\}
\end{array}$$

נניח שיש צירוף לינארי של אברי B ששווה לאפס:

$$\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{k}a^{(j)}v_i^{(j)} = 0$$

אבל B_j בסיס ולכן $\forall i : a_i=0 \Leftarrow \sum a_i^{(j)}v_i^{(j)}$. כל המקדמים הם אפס ולכן B בת"ל. ■

משפט קיילי המילטון

משפט 0.17 אם A מטריצה $n\times n$ ו-$f(\lambda)$ הפולינום האופייני של A אז $f(A)=0$.

הוכחה: הפולינום האופייני הוא: $f(\lambda)=|\lambda I-A|$

$$(\lambda I-A)\mathrm{adj}(\lambda I-A)=f(\lambda)I$$

כל אלו מטריצות של פולינומים.

נסמן $B(\lambda)=\mathrm{adj}(\lambda I-A)$.

נוכל לכתוב את $B(\lambda)$ כפולינום מטרציני:

$$B(\lambda)=B_0+B_1\lambda+B_2\lambda^2+\ldots+B_{n-1}\lambda^{n-1}$$

(האיברים ב-$B(\lambda)$ הם מהצורה $\pm|M_{j,i}|_{(n-1)\times(n-1)}$, ועל כן הפולינום מדרגה $n-1$ לכל היותר).

$$(\lambda I-A)(B_0+B_1\lambda+\ldots+B_{n-1}\lambda^{n-1})=f(\lambda)I$$

נניח ש:

$$f(\lambda)=a_0+a_1\lambda+\ldots+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\lambda^n$$

לכן, באגף ימין של השוויון:

$$a_0I+a_1\lambda I+a_2\lambda^2I+\ldots+a_{n-1}\lambda^{n-1}I+\lambda^nI$$

באגף שמאל:

$$-AB_0+(B_0-AB_1)\lambda+(B_1-AB_2)\lambda^2+\ldots+B_{n-1}\lambda^n$$

נשווה מקדמים:

$$\begin{array}{rcl}
-AB_0 & = & a_0I\Rightarrow -AB=a_0I\\
B_0-AB_1 & = & a_1I\Rightarrow AB_0-A^2B_1=a_1A\\
B_1-AB_2 & = & a_2I\Rightarrow A^2B_1-A^3B_2=a_2A^2\\
 & \vdots & \\
B_{n-1} & = & I\Rightarrow A^nB_{n-1}=A_n
\end{array}$$

נחבר את המשוואות ונקבל:

$$0=a_0I+a_1A+a_2A^2+\ldots+A^n=f(A)$$

■

הערות

אינני ערב לנכונות התוכן.

אם יש לכם תיקונים, בבקשה שילחו לי ל-ronen@tx.technion.ac.il.

גרסא מעודכנת, במידה ותהיה, תמצא ב-www.technion.ac.il/~ronen