21.1.08 ①

אלגברה לינארית א' - תרגול

תזכורת 1) - התחומר לפני השבוע

שעת קבלה לפני השיעור ביום שני. ($15^{00}-16^{00}$)
הקבלה בשורה, קוראת מרתק, שאלה 2.

מספרים מורכבים

$\mathbb{R}$ - מספרים ממשיים $a+b=b+a$, $ab=ba$, $a(b+c)=ab+ac$
קיים לכל $a\in\mathbb{R}$: $a+(-a)=0$, $a\cdot\frac{1}{a}=1$

מוטיבציה: רוצים שתהיה משוואת ל- $\sqrt{-1}$, כלומר $a^2=1$. מסמנים ע"י i
ל- $\mathbb{R}$ שמקיים $i^2=1$.

הגדרה מתימטית

$$\mathbb{C}=\{x+iy \mid x,y\in\mathbb{R}\}$$

בעיה ב יש:

מס' ממשיים: $x+i0$
מס' מדומים: $0+iy$
מס' מרוכב כללי $z=x+iy$

סימונים:

$-z=-x-iy \Leftarrow -z+z=0=0+0i$

$\bar{z}=x-iy$

$Im(z)=y$ (לא iy!)

$Re(z)=x$

כפל וחיבור ב- $\mathbb{C}$

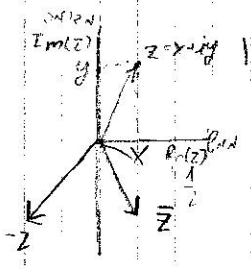
לי פתיחת סוגרים עם הכלל $i^2=1$

חיבור $(a+ib)+(c+id)=(a+c)+(b+d)i$

כפל $(a+ib)\cdot(c+id)=ac+iad+ibc+i^2bd$

$=(ac-bd)+i(ad+bc)$

הגדרה: גודל של z: $(|z|)$ הוא $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$



נשים לב: $z\cdot\bar{z}=(x+iy)(x-iy)$

$=x^2+y^2+i(\overset{=0}{xy-yx})$

$=x^2+y^2=|z|^2\in\mathbb{R}$

$z\cdot\left(\bar{z}\cdot\frac{1}{|z|^2}\right)=(z\cdot\bar{z})\cdot\frac{1}{|z|^2}=\frac{|z|^2}{|z|^2}=1$

לכן ניתן לרשום: $z^{-1}=\frac{1}{z}=\frac{\bar{z}}{|z|^2}=\frac{x-iy}{x^2+y^2}$

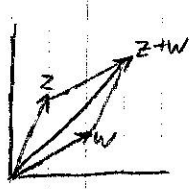
דוגמא: $\frac{1}{1+i}=\frac{1-i}{1^2+1^2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$

תשע

21.1.08 ②

מרוכבים: הגדרה פולארית 1 – תרגול

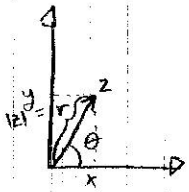
איך נוסחאת סיפ $\bar{z}$:



$$Re(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}$$

$$Im(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i}$$

הגדרה פולארית:



$$x = r\cdot\cos\theta \qquad z = x+yi = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$y = r\cdot\sin\theta$$

סימון: $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

$$\boxed{z = r\cdot e^{i\theta}}$$

משים לב:

$$e^{i(\theta+2\pi k)} = e^{i\theta}$$

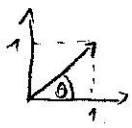
אשר תמיד למקום θ כך ש $-\pi \le \theta < \pi$

נסמנים: $\boxed{\theta = Arg(z)}$

ומכאן:

$$\boxed{z = |z|\cdot e^{i\,Arg(z)}}$$

דוגמא:

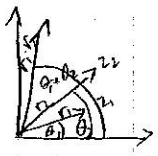


$$z = 1+i$$

$$\theta = \frac{\pi}{4} \qquad |z| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$1+i = \sqrt{2}\cdot e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}\cdot e^{i\frac{\pi}{4}+2\pi k} \qquad k\in\mathbb{Z}$$

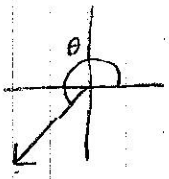
(לא נשנה)



כפל בהגדרה פולארית:

$$(r_1\cdot e^{i\theta_1})(r_2 e^{i\theta_2}) = r_1\cdot r_2\, e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

דוגמא:



למצוא הגדרה פולארית של $-1-i$

$$\theta = \pi + \frac{\pi}{4}$$

$$|-1-i| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$-1-i = \sqrt{2}\cdot e^{i(\pi+\frac{\pi}{4})}$$

נוסחאת דה-מואבר

$$z = r\cdot e^{i\theta} \Rightarrow z^n = r^n\cdot e^{in\theta}$$

דוגמא:

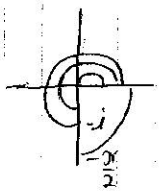
$$(1+i)^{100} = \sum_{j=0}^{100}\binom{100}{j}1^j i^{100-j}$$

$$= |1+i|^{100}\cdot e^{i\cdot Arg(1+i)100} = 2^{50}\cdot e^{i25\pi}$$

$$= 2^{50}(\underbrace{\cos 25\pi}_{\cos\pi = -1} + i\underbrace{\sin(25\pi)}_{\sin\pi = 0}) = -2^{50}$$

21.1.08 ③

אלגברה לינארית 1 – תרגול



דוגמה: כפלים מקוצרים:

$$-i = e^{i\frac{-\pi}{2}}, \quad 1 = e^{i\cdot 0}, \quad -1 = e^{i\pi}, \quad i = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

הערה:

$$\bar{z} = r\cdot e^{i(-\theta)}$$

חישוב (נוסחת) מרובע

רוצים למצוא את $\cos 3\theta$

$$\cos 3\theta + i\sin 3\theta = e^{i3\theta} \underset{\text{זה נשאיר}}{=} (e^{i\theta})^3 = (\cos\theta + i\sin\theta)^3$$

$$= \cos^3\theta + 3i\cos^2\theta\cdot\sin\theta + 3i^2\cos\theta\sin^2\theta + i^3\sin^3\theta$$

$$= (\cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta) + i(3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta)$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} \cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta \\ \sin 3\theta = 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta \end{cases}$$