25.3.2008

$$T: \underset{B,B'}{\overset{\cup}{V}} \to \underset{C,C'}{\overset{\cup}{W}}$$

$$[T]^{B'}_{C'} = C^{C'}_{C} \cdot [T]^{B}_{C} \underbrace{\left(C^{B'}_{B}\right)^{-1}}_{= C^{B}_{B'}}$$

(*) בתרגיל היה נתון:

$$[T]_E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$$

הוכחנו אתמול:

$$[T]_B = [T]^B_B = C^B_E\, [T]_E \cdot \left(C^B_E\right)^{-1}$$

מוצאים את ההופכי

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = C^B_E = \left(C^E_B\right)^{-1}$$

$$C^E_B = \begin{pmatrix} | & | & | \\ [b_1]_E & [b_2]_E & [b_3]_E \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & | & | \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow [T]_B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

שימושים למטריצה של העתקה

1) $T: \underset{B}{\overset{\cup}{V}} \to \underset{C}{\overset{\cup}{W}}$, T איזומ' $\Leftrightarrow$ $[T]^B_C$ הפיכה וההפכי נתון ע"י $[T^{-1}]^C_B = \left([T]^B_C\right)^{-1}$

2) $\ker T = \varphi_B^{-1}\left(N\left([T]^B_C\right)\right)$

מרחב הפתרונות למערכת הומוגנית
$N(A) = \{x \mid Ax = 0\}$

$\varphi_C: W \xrightarrow{\sim} F^n$

$\varphi_C(w) := [w]_C$

$\operatorname{Im} T = \varphi_C^{-1}\left(C\left([T]^B_C\right)\right)$

מרחב עמודות

לדוגמא,

$V = \mathbb{R}_4[x]$ $\qquad W \subseteq V$

$$W = \operatorname{span}\{1+x+x^2,\ x+2x^3,\ 1+x^2,\ x+x^3\}$$

רוצים למצוא בסיס לW $\qquad B = [1, x, x^2, x^3, x^4]$ בסיס סטנדרטי ל V

$$\varphi_B(W) = \varphi_B(\operatorname{span}\{v_1, \dots, v_k\}) = \operatorname{span}\{\varphi_B(v_1), \dots, \varphi_B(v_k)\}$$

$$\varphi_B(W) = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} = R\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = R$$

בת"ל

$\boxed{\text{בסיס של } W}$

דירוג
$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\2\\0\end{pmatrix} \right\}$$

$$\Rightarrow W = \varphi_B^{-1}\left(\mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\2\\0\end{pmatrix} \right\} \right) = \mathrm{Span}\{1+x+x^2, x+2x^3, 2x^3\}$$

(תמונה של העתקה)

$\varphi_B(v) = [v]_B$

$\varphi_B^{-1}([v]_B) = V$

$[\varphi_B^{-1}(x)]_B = x \quad x \in F$

תכונות של איזומורפיזם

יהי $\varphi: V \to W$ איזומורפיזם:

1) $\dim V = \dim W$

2) לכל בסיס B של V, $\varphi(B)$ בסיס של W

לכל קב' בת"ל k ב-V, $\varphi(k)$ בת"ל

3) $U \leq V$ תת ממימד k $\quad \varphi U \leq W$ תת ממימד k $\Leftarrow$ $\varphi|_U : U \cong \varphi(U)$ צמצום התחום ל-U

ראינו בעבר: $rkAB \leq rkA, rkB$. אותו דבר לגבי העתקות:

$rk(T \circ S) \leq rk(T), rk(S)$ מימד של התמונה של העתקה

כיוון שמתקיים $\mathrm{Im}\,T = \varphi_C^{-1}(C([T]_C^B))$

$$\dim \mathrm{Im}\,T = \dim C([T]_C^B)$$
$$\begin{array}{cc} \| & \| \\ rkT & rk[T]_C^B \end{array}$$

$$rk[T]_B^C \cdot [S]_C^A \leq rk[T]_B^C, rk[S]_C^A$$

$$\Rightarrow \quad rkT\circ S \leq rkT, rkS$$

$$\mathrm{Im}(T \circ S) = \mathrm{Im}(T/\mathrm{Im}S) \qquad V \xrightarrow{S} W \xrightarrow{T} U$$

$$\mathrm{Im}\,T \supseteq \mathrm{Im}\,T\circ S$$

$$\dim \mathrm{Im}(T\circ S) = \dim(\mathrm{Im}(T/\mathrm{Im}S)) \leq \dim \mathrm{Im}S = rkS \quad \Rightarrow \quad rk\,T\circ S \leq rkS$$

$$\dim \mathrm{Im}(T\circ S) \leq \dim \mathrm{Im}\,T = rkT$$
$$\| \\ rk(T\circ S)$$

נגדיר $A_{n\times m}$, $B_{m\times p}$, $T_A(x)=Ax$, $T_B(x)=Bx$

$$\mathbb{F}^p \xrightarrow{T_B} \mathbb{F}^m \xrightarrow{T_A} \mathbb{F}^n$$
$$\cup \qquad\quad \cup \qquad\quad \cup$$
$$E \qquad\quad E \qquad\quad E$$

בבסיסים סטנדרטיים:

$$rk\,(T_A\circ T_B) = rkT_A,\ rkT_B$$

$$\Rightarrow \quad rk\,[T_A]_E^E\cdot[T_B]_E^E \leq rk\,[T_A]_E^E\ ,\ rk\,[T_B]_E^E$$ מה שהוכחנו עכשיו

תרגיל: יהיו $V \xrightarrow{S} W \xrightarrow{T} U$, $\dim W=n$, צ"ל: $rk(T\circ S) \geq rkT+rkS-n$

פתרון:

$$I_m\, T\circ S = I_m\,(T/I_mS)$$ (בשביל להשתמש במבחן צריך להוכיח אותו)

באופן כללי:
$$rkT = n-\dim\ker T$$

$$\Rightarrow rk(T/I_mS) = \dim I_mS - \dim\ker(T/I_mS)$$
$$\overset{\shortparallel}{rk(T\circ S)}$$

$\ker T=\{x\in V \mid Tx=0\}$

$$\ker(T/I_mS)=\{x\in I_mS \mid Tx=0\} = \ker T\cap I_mS$$ (חיתוך קבוצות)

$$rk(T\circ S) = rkS-\dim(\ker T\cap I_mS) \geq rkS-\dim\ker T = rkS+rkT-n$$

מש"ל

מסקנה: עבור $B_{m\times p}$, $A_{n\times m}$ מתקיים

$$rkAB \geq rkA+rkB-m$$

שאלות ממבחנים

(1) 2002

$T:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$ לינארית, $\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ - בסיס סטנדרטי ל- $\mathbb{R}^4$

ידוע כי: $T(e_1)+T(e_3)=T(e_2)$

$T(e_1)+T(e_2)=T(e_3)$

צ"ל: א) $e_1\in\ker T$ ב) $\dim\ker T\ge 2$

פתרון: א) $T(e_1)=T(e_2)-T(e_3)$

$\underline{T(e_1)=T(e_3)-T(e_2)}$

$T(e_1)=-T(e_1) \Rightarrow \boxed{T(e_1)=0}$

ב) צריך למצוא עוד וקטור שלא תלוי לינארית ב e_1 ששייך לגרעין

$T(e_2)=T(e_3)$

ולכן $T(e_2-e_3)=0$, $e_2-e_3\in\ker T \Rightarrow \boxed{\dim\ker T\ge 2}$

---

(2) מועד א 2002

מצאו כל $a\in\mathbb{C}$ (יכול להיות מרוכב) כך שאין פתרונות למע':

$$\begin{cases} x+(1-a)y+z=1 \\ 2x-y+z=3 \\ 3x-ay+(a+1)z=4 \end{cases} \qquad A=\begin{pmatrix} 1 & 1-a & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & -a & a+1 \end{pmatrix}$$

אם צריך למצוא a שיש עבורו פתרונות צריך לדרג וכו'.

פתרון:

יודעים שקיים פתרון יחיד $\Leftrightarrow \det A\neq 0$

למטריצה בלי עמודת פתרונות

$|A|=2a^2-5a+3=0$

$a=\frac{3}{2},1$

מציבים את זה במשוואות.

במקרה של $a=1$ יש אינסוף פתרונות

במקרה של $\boxed{a=\frac{3}{2} \text{ אין פתרונות}}$

$$A_n=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ -1 & x & 0 & & & 0 \\ & -1 & x & 0 & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & 0 & & & & 0 \\ & & & & -1 & x \end{vmatrix}$$

לפי עמודה אחרונה

$$= (-1)^{n+1}\cdot n\cdot(-1)^{n-1} + (-1)^{2n} x\, A_{n-1} = n + xA_{n-1}$$

$A_1=1$

$A_2=2+x$

$A_3=3+2x+x^2$

נוכיח באינדוקציה:

להוכיח באינדוקציה

$$A_n = n+(n-1)x+(n-2)x^2+\dots+x^{n-1} = n+xA_{n-1} = \sum_{k=1}^{n} kx^{n-k}$$

---

(4) האם קיימים $U,V,W\subseteq \mathbb{F}^n$ ת"מ כך ש $\dim(U+V+W)=8$

$\dim(U\cap V)=2$

הוכח: האם $\dim U=\dim V=\dim W=3$?

נשתמש בנוסחה של סכום מימדים:

בודקים אם

$$(8=)\ \dim((U+V)+W) = \dim(U+V)+\dim(W)-\dim((U+V)\cap W) =$$

$$3+3-2+3 \quad = \dim U+\dim V-\dim(U\cap V)+\dim W-\dim((U+V)\cap W) =$$

$$= 3+3-2+3-\dim((U+V)\cap W) = \underline{7-\square} \le 7 \ne 8$$

$\boxed{\text{ולכן לא מתקיים}}$

---

(5) L_1, L_2 תת מרחבים של V ממימד סופי, הוכיחו כי אם $\dim(L_1+L_2)=1+\dim L_1\cap L_2$ אז אחד מ- L_1,L_2 הוא $L_1\cap L_2$ והשני L_1+L_2 (דרך אחרת להגיד מוכל)

$(L_1+L_2\supseteq L_1\cap L_2)$

$$\dim(L_1+L_2)=\dim L_1+\dim L_2-\dim L_1\cap L_2 \quad \textcircled{\ge}$$

נניח בשלילה $L_2\ne L_1\cap L_2,\ L_1\ne L_1\cap L_2$

$$\Rightarrow \dim L_1\cap L_2<\dim L_1 \quad , \quad \dim L_1\cap L_2<\dim L_2$$

$$\dim L_1\ge \dim L_1\cap L_2+1 \quad , \quad \dim L_2\ge \dim L_1\cap L_2+1$$

(מותר כי מימדים הם מספרים שלמים)

תיקון: שוויון והגבלה

$$\textcircled{\ge}\ 2\dim L_1\cap L_2+2-\dim L_1\cap L_2=2+\dim L_1\cap L_2$$

סתירה לכן $L_1=L_1\cap L_2$ או $L_2=L_1\cap L_2$

6. A, B מטריצות $\underset{n\times m}{A}$, $\underset{m\times n}{B}$ ונתון $BA=I_m$, $AB=I_n$

הוכח: $m=n$

פתרון:

$$n = rkAB \le rkA \le n \quad \Rightarrow \quad rkA = n$$

$$m = rkBA \le rkA \le m \quad \Rightarrow \quad rkA = m$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{m=n}$$