24/3/08

תרגול

מטריצה של העתקה

$\dim V = n$

$\dim W = m$

$$\varphi_B(v) = [v]_B$$

בסיסים

$B \subset V$, $C \subset W$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "T"] \arrow[d, shift right, "\varphi_B"'] & W \arrow[d, "\varphi_C"] \\ F^n \arrow[u, shift right, "\varphi_B^{-1}"'] \arrow[r, "\varphi_C \circ T \circ \varphi_B^{-1}"'] & F^m \end{tikzcd}$$

כפל במטריצה שנסמן $[T]_C^B \in M_{m\times n}(F)$

מתקיים:

$$[T]_C^B \cdot [v]_B = \varphi_C \circ T \circ \varphi_B^{-1}(\varphi_B(v))$$

$$= \varphi_C \cdot T(\varphi_B^{-1} \circ \varphi_B(v)) = \varphi_C(Tv) = [Tv]_C$$

$$\forall v \in V: \quad [T]_C^B [v]_B = [Tv]_C$$

קיימת מטריצה יחידה $A_{m\times n}$ כך ש

$$\forall v \in V \quad A[v]_B = [Tv]_C$$

איך לחשב $[T]_C^B$:

יהי $B = [b_1, \ldots, b_n]$

מתקיים:

$$[b_i]_B = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i = e_i$$

$$b_i = 0\cdot b_1 + 0\cdot b_2 + \ldots + 1\cdot b_i + \ldots + 0\cdot b_n$$

תז׳: לכל מטריצה $A_{m\times n}$

$A e_i = C_i(A)$ - העמודה ה-i של A

$$\underbrace{[T]_C^B \cdot [b_i]_B}_{[Tb_i]_C} = [T]_C^B \cdot e_i = C_i([T]_C^B)$$

$$\Longrightarrow [T]_C^B = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ [Tb_1]_C & [Tb_2]_C & \ldots & [Tb_n]_C \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

$$[T]_C^B [v]_B = [Tv]_C$$

דוגמא:

$V = \mathbb{R}_2[x]$, $W = \mathbb{R}^3$

$$B = [\underset{b_1}{1}, \underset{b_2}{1+x}, \underset{b_3}{1+x^2}] \subset V$$

$$C = [e_1, e_2, e_3] = E_3 \subset W$$

נגדיר $T(ax^2+bx+c) := \begin{pmatrix} c \\ b \\ a+b \end{pmatrix}$

<u>נחשב את $[T]_C^B$</u>:

$$Tb_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = [Tb_1]_C$$

$$Tb_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad [Tb_3]_C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow [T]_C^B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

ניקח $v = x^2$, $[v]_B = ?$

נרשום את v כצירוף לינארי של הבסיס, ונמצא את המקדמים.

$$x^2 = \alpha(1) + \beta(1+x) + \gamma(1+x+x^2)$$

$$\Longleftrightarrow x^2 = (\alpha+\beta+\gamma) + x(\beta+\gamma) + x^2(\gamma)$$

$$0 = (\alpha+\beta+\gamma) + x(\beta+\gamma) + x^2(\gamma-1)$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha+\beta+\gamma = 0 \\ \beta+\gamma = 0 \\ \gamma - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = -1 \\ \gamma = 1 \end{cases} \Rightarrow [v]_B = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$[Tv]_C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$T(x^2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ניתן לראות שכך

<u>דוגמא</u>:

$V = W$ B, C - בסיסים של V

$T = Id$

$$[T]_C^B = C_B^C \rightarrow \text{מטריצת מעבר}$$

<u>הסבר</u>: C_B^C מקיימת:

$$C_B^C [v]_B = [v]_C$$

$$[T]_C^B [v]_B = [Tv]_C = [v]_C$$

<u>באופן כללי</u>: עבור V - מ"ו, B - בסיס

אם שתי מטריצות A, C מקיימות

$$\forall v \in V: A \cdot [v]_B = C \cdot [v]_B \Rightarrow A = C$$

<u>דוגמא</u>: $V = W = R^3$

$$B = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$[T] = [T]^B$

<u>נשים לב</u>

$$[T]_E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

רוצים למצוא את $[T]_B$ מ- $[T]_E$

<u>באופן כללי</u>: $T : V \longrightarrow W$

$$\begin{array}{cc} V & W \\ \cup & \cup \\ B, B' & C, C' \end{array}$$ (בסיסים)

נתון $[T]_C^B$ רוצים למצוא את $[T]_{C'}^{B'}$

$$[T]_{C'}^{B'} = [\varphi_{C'} \circ T \circ \varphi_{B'}^{-1}]_E$$

$$\begin{array}{ccccccc} F^n & \xrightarrow{\varphi_{B'}^{-1}} & V & \longrightarrow & W & \xrightarrow{\varphi_{C'}} & F^m \\ \cup & & \cup & & \cup & & \cup \\ E_n & & B & & C & & E_m \end{array}$$

$$= [\varphi_{C'}]_E^C \, [T]_C^B \, [\varphi_{B'}^{-1}]_B^E$$

$$[\varphi_{C'}]_E^C = C_C^{C'}$$

$$[\varphi_{C'}]_E^C \, [v]_C \overset{?}{=} [v]_{C'}$$

$$[\varphi_{C'}(v)]_E = \varphi_{C'}(v) = [v]_{C'}$$

$$[\varphi_{B'}^{-1}]_B^E = \left([\varphi_{B'}]_E^B\right)^{-1} = \left(C_B^{B'}\right)^{-1} = C_{B'}^B$$