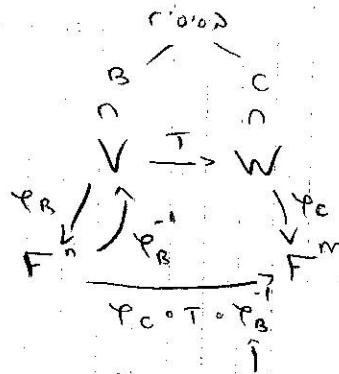


24/3/08

$$\varphi_B(v) = [v]_B$$



תרגול
 מרחב וקטורי C על \mathbb{R}

$\dim V = n$

$\dim W = m$

$M_{m \times n}(F) \ni [T]_C^B$ מטריצה $m \times n$ מעל F

$$[T]_C^B \cdot [v]_B = \varphi_C \circ T \circ \varphi_B^{-1}(\varphi_B(v))$$

$$= \varphi_C \circ T(\varphi_B^{-1} \circ \varphi_B(v)) = \varphi_C(Tv) = [Tv]_C$$

$$\forall v \in V : [T]_C^B [v]_B = [Tv]_C$$

קיים מטריצה $m \times n$ ייחודית A כך ש-

$$\forall v \in V \quad A [v]_B = [Tv]_C$$

שוקלת $[T]_C^B$

$$B = [b_1, \dots, b_n]$$

$$[b_i]_B = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = e_i$$

$$b_i = 0 \cdot b_1 + \dots + 1 \cdot b_i + \dots + 0 \cdot b_n$$

מטריצה $m \times n$ A :

$$A e_i = c_i(A) \quad A \text{ על } i \text{-י (העמוד)}$$

$$[T]_C^B \cdot [b_i]_B = [T]_C^B \cdot e_i = c_i([T]_C^B)$$

$$\parallel$$

$$[T b_i]_C$$

$$\Rightarrow [T]_C^B = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ [T b_1]_C & [T b_2]_C & \dots & [T b_n]_C \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

$$[T]_C^B [v]_B = [Tv]_C$$

דוגמה

$$V = \mathbb{R}_2[x], \quad W = \mathbb{R}^3$$

$$B = [b_1, b_2, b_3] \subset V$$

$$B = [1, 1+x, 1+x^2] \subset V$$

$$C = [e_1, e_2, e_3] = E_3 \subset W$$

$$T(ax^2+bx+c) = \begin{pmatrix} c \\ b \\ a+b \end{pmatrix} \quad (32)$$

$$Tb_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = [Tb_1]_C$$

$[T]_C^B$ מפתח

$$Tb_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, [Tb_3]_C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow [T]_C^B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$x^2 = \alpha(1) + \beta(1+x) + \gamma(1+x+x^2)$$

$$[v]_B = 2, v = x^2 \quad \text{נתן}$$

נראה כי v כצורת בסיסית של V

$$\Leftrightarrow x^2 = (\alpha + \beta + \gamma) + x(\beta + \gamma) + x^2(\gamma)$$

המקום, ונמצא α, β, γ מתאימים

$$0 = (\alpha + \beta + \gamma) + x(\beta + \gamma) + x^2(\gamma - 1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \\ \gamma - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = -1 \\ \gamma = 1 \end{cases} \Rightarrow [v]_B = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$[Tv]_C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$T(x^2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

נתן מפתח

1023

v (ערכים - B, C)

$$V = W$$

$$T = Id$$

$$[T]_C^B = C_B^C \rightarrow \text{מפתח מובנה}$$

$$C_B^C [v]_B = [v]_C \quad \text{מקיים } C_B^C \quad \text{כנס}$$

$$[T]_C^B [v]_B = [Tv]_C = [v]_C$$

כולן B, C : ערכי v - B, C

מפתח A, C מובנה

$$\forall v \in V: A \cdot [v]_B = C \cdot [v]_B \Rightarrow A = C$$

$$B = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right] \quad V = W = R^3 \quad \text{1023}$$

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$[T] = [T]_B^B$$

שאלה

$$[T]_E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$[T]_E \sim [T]_B$ (כיוון שמתחילים ב-1)

$$T: V \rightarrow W$$

באופן

$$(B, B', C, C')$$

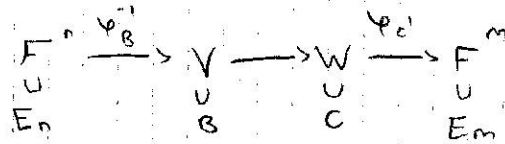
$$[T]_{C'}^B$$

כיוון שמתחילים ב-1

$$[T]_C^B$$

הימן

$$[T]_{C'}^B = [\varphi_{C'} \circ T \circ \varphi_B^{-1}]_E$$



$$= [\varphi_{C'}]_E^C [T]_C^B [\varphi_B^{-1}]_B^E$$

$$[\varphi_{C'}]_E^C = C_{C'}^C$$

$$[\varphi_{C'}]_E^C [v]_C = [v]_{C'}$$

$$[\varphi_{C'}(v)]_E = \varphi_{C'}(v) = [v]_{C'}$$

$$[\varphi_B^{-1}]_B^E = ([\varphi_B]_E^B)^{-1} = (C_B^{B'})^{-1} = C_{B'}^B$$