18/3/08

תרגול 20

הערה: לכל R,S,T מ"ל: $(S\circ T)\circ R = S\circ(T\circ R)$.

הערה: ה"ל לוקחת צירופים ליניאריים לצירופים ליניאריים, כלומר

T - העתקה ליניארית $T(\sum\alpha_i v_i)=\sum\alpha_i T(v_i)$

מסקנה: אם עבור $v_1,\dots,v_n$ ידועים $Tv_1,\dots,Tv_n$ אז אפשר לחשב את T על $span\{v_1,\dots,v_n\}$. במילים אחרות, הערכים של T על קבוצה פורשת קובעים את T, אם עבור $v_1,\dots,v_n$, $Tv_i=Sv_i$ $i=1,\dots,n$ אז $\forall v\in span\{v_1,\dots,v_n\}: Tv=Sv$

למשל: אם T מתאפסת על בסיס אז היא העתקת ה-0.

אם $[v_1,\dots,v_n]$ בסיס נסמן $V=span\{v_1,\dots,v_n\}$ אז עבור כל $w_1,\dots,w_n\in W$ אפשר להגדיר ה"ל $T:V\to W$ יחידה, כך ש $Tv_i=w_i$.

הסבר: לכל $v\in V$ יש הצגה יחידה $v=\sum\alpha_i v_i$

$\Leftarrow$ אפשר להגדיר $Tv=\sum\alpha_i w_i$

דוגמא: נמצא את ההעתקה $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ כך ש:

$$T\underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}}_{v_1}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\quad T\underbrace{\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}}_{v_2}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\quad T\underbrace{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}_{v_3}=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$$

עבור $v=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$, α_i זה הקואורדינטות של v לפי הבסיס.

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=v=\alpha_1v_1+\alpha_2v_2+\alpha_3v_3$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\alpha_1=\frac{x+y}{2}\\ \alpha_2=\frac{x-y}{2}\\ \alpha_3=z\end{cases}\Rightarrow T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\frac{x+y}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+\frac{x-y}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+z\\ \frac{x-y}{2}+2z\\ \frac{x+y}{2}\end{pmatrix}$$

תרגיל: האם קיימת ה"ל $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ כך ש

$$T\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\quad T\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\quad T\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$$

פתרון: לא קיימת. נניח שכן, אז צריך להתקיים"

$$T\Big(\underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}}_{=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}\Big)=T\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+\frac{1}{2}T\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

סתירה!

תמונה וגרעין.

הגדרה: עבור $T: V \to W$ מגדירים

$$ImT = \{Tv \mid v \in V\} \subseteq W$$

$$KerT = \{v \in V \mid Tv = 0\} \subseteq V$$

משפט: T מונומורפיזם (חח"ע) אמ"מ $Ker\,t = 0$

הגדרה: מסמנים $rkT = \dim ImT$

תרגיל: $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_3[x]$

$$T\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 3(-a+b+c)x^3 + (-3a+2b+c)x^2 + (-b-2c)x + (-15a+11b+7c)$$

חשבו $KerT$, ImT, rkT

פתרון: נמצא את הגרעין - צריך למצוא את כל $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ כך ש $T\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0$

(פולינום האפס) (משווים את המקדמים לאפס)

$$\Rightarrow \begin{cases} -a+b+c=0 \\ -3a+2b+c=0 \\ -b-2c=0 \\ -15a+11b+7c=0 \end{cases} \iff \begin{cases} a=t \\ b=2t \\ c=-t \end{cases}$$

$$\Rightarrow KerT = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ 2t \\ -t \end{pmatrix} \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\} = Span\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

תמונה: נשתמש במשפט:

אם $v_1, \dots, v_n$ קבוצה פורשת אז $ImT = Span\{Tv_1, \dots, Tv_n\}$

נבחר את $v_1, \dots, v_n$ להיות הבסיס הסטנדרטי, כלומר:

$$[v_1, v_2, v_3] = [e_1, e_2, e_3]$$

$$ImT = Span\left\{ T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} =$$

$$= Span\{-3x^3 - 3x^2 - 15,\ 3x^3 + 2x^2 - x + 11,\ 3x^3 + x^2 - 2x + 7\} \ \textcircled{E}$$

$$\begin{pmatrix} -3 & -3 & 0 & -15 \\ 3 & 2 & -1 & 11 \\ 3 & 1 & -2 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{דירוג}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\textcircled{E}\ Span\{x^3 + x^2 + 5,\ x^2 + x + 4\}$$

נחזור לפולינום

$\Leftarrow rkT = 2$ □

שימו לב: $\overset{2}{\dim ImT} + \overset{1}{\dim kerT} = \dim \mathbb{R}^3 = 3$

משפט: עבור $T:V\to W$ ט"ל מתקיים

$$\dim \operatorname{Im}T + \dim \operatorname{Ker}T = \dim V$$

מסקנה: $\dim \operatorname{Im}T \le \dim V$ (המימד של התמונה קטן או שווה ממימד המרחב V)

תרגיל: האם קיימת ט"ל $T:\mathbb{R}^3 \to M_2(\mathbb{R})$ כך ש

$\operatorname{Im}T = \{$מטריצות אלכסוניות$\}$, $\operatorname{Ker}T = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$

תשובה: לא, כי $\dim \operatorname{Ker}T = 2$

$$\operatorname{Im}T = \left\{\begin{pmatrix}a & 0\\0 & b\end{pmatrix} \middle| a,b\in\mathbb{R}\right\} = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\right\}$$

$\Leftarrow$ $\dim \operatorname{Im}T = 2$

אם T לינארית אז $2+2=\dim\mathbb{R}^3=3$ וזו סתירה! $\square$

משפט שני: יהיו נתונים ת"מ $K_1\subseteq V$, $K_2\subseteq W$ כך ש $\dim K_1+\dim K_2=\dim V$ אז קיימת העתקה $T:V\to W$ כך ש

$$\operatorname{Ker}T=K_1,\quad \operatorname{Im}T=K_2$$

איך מגדירים T כזו? נניח $\dim K_1 = l$, $\dim K_2 = m$

ניקח $[v_1,\dots,v_l]$ בסיס ל-K_1 ונרחיב אותו לבסיס של V
$[v_1,\dots,v_l,v_1',\dots,v_m']$ וניקח בסיס ל-K_2: $[w_1,\dots,w_m]$

נגדיר $Tv_i=0$ $\quad i=1,\dots,l$

$Tv_i'=w_i$ $\quad i=1,\dots,m$

אפשר לבדוק ש $\operatorname{Im}T=K_2$, $\operatorname{Ker}T=K_1$. מההגדרה $[v_1,\dots,v_l]\subseteq \operatorname{Ker}T$

$\Leftarrow$ $K_1=\operatorname{span}\{v_1,\dots,v_l\}\subseteq \operatorname{Ker}T$

$K_2\subseteq \operatorname{Im}T$

מקבלים $\dim \operatorname{Ker}T \ge \dim K_1$

$\dim \operatorname{Im}T \ge \dim K_2$

אבל $\dim \operatorname{Im}T+\dim \operatorname{Ker}T = \dim V = \dim K_1+\dim K_2$

$\Rightarrow \dim \operatorname{Ker}T=\dim K_1,\quad \dim \operatorname{Im}T=\dim K_2$

$\Rightarrow \operatorname{Ker}T=K_1,\quad \operatorname{Im}T=K_2$

הגדרה: $T:V\to W$ (ט"ל) נקראת איזומורפיזם אם T חח"ע ועל

במקרה זה, קיימת ט"ל הפכית $T^{-1}:W\to V$

הערה כללית: במתמטיקה - איזומורפיזם $\varphi:A\to B$ זו העתקה ושומרת

על מבנה, כך שקיימת $\psi: B\to A$ ששומרת על מבנה ומקיים

$$\varphi\circ\psi = \mathbb{1}_B \qquad \psi\circ\varphi = \mathbb{1}_A$$

<u>הערה</u>: לפי המשפט על תמונה וגרעין מקבלים שכדי T איזומורפיזם

חייב להתקיים $\dim W = \dim \operatorname{Im} T = \dim V$

(V ו- W צריכים להיות מאותו מימד)

<u>משפט</u>: אם $T: V\to W$, $\dim V = \dim W$

T חח"ע $\iff$ T על $\iff$ T איזו'

<u>תרגיל</u>: נתונה ה"ל $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_2[x]$

$$T\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = x^2+x+1$$

$$T\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = x^2+x$$

$$T\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = x^2$$

הראו כי T על.

<u>פתרון</u>: כיוון ש $\dim\mathbb{R}^3 = \dim \mathbb{R}_2[x] = 3$ אז מספיק לבדוק $\operatorname{Ker} T = 0$ (T חח"ע)

$$T\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = (x_1+x_2+x_3)x^2 + (x_1+x_2)x + x_1 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0\\ x_2 = 0\\ x_3 = 0\end{cases} \Rightarrow \operatorname{Ker} T = 0$$

<u>מעבר קואורדינטות</u>

V - מ"ו ממד n. $[e] = [e_1,\dots,e_n]$ בסיס ל-V. ראינו בעבר את העתקת הקואורד' לפי e:

$$\varphi_e: V \to \mathbb{R}^n$$

$$v \to [v]_e$$

אפשר לבדוק שזו העתקה לינארית, ו- φ_e - איזומורפיזם

(ההפכי נתון ע"י $\varphi_e^{-1}\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n x_i e_i$)

אם יש עוד בסיס $[e'] = [e_1',\dots,e_n']$ יש גם את $\varphi_{e'}: V\to\mathbb{R}^n$

$$[v] \to [v]_{e'}$$

אפשר לרשום $\varphi_e = \varphi_e \circ \overbrace{(\varphi_{e'}^{-1}\circ\varphi_{e'})}^{\mathbb{1}_V\ (\text{העתקת הזהות})}$ $\Leftarrow$ $\varphi_e = \underbrace{(\varphi_e\circ\varphi_{e'}^{-1})}_{T^e_{e'}: \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n}\circ\varphi_{e'}$

$\Leftarrow$

$T^e_{e'}$ מקיים: $[v]_e = T^e_{e'}([v]_{e'})$

$T^e_{e'}$ = כפל במטריצה $C^e_{e'}$ ולכן $[v]_e = C\cdot[v]_{e'}$

איך למצוא את C ?

C מקיים: $[e_1',\dots,e_n'] = [e_1,\dots,e_n]\cdot C$

$$[v_1,\dots,v_n]\cdot\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn}\end{pmatrix} = \left[\sum_{i=1}^n a_{i1}v_i,\dots,\sum_{i=1}^n a_{in}v_n\right]$$

$$C^e_{e'} = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ [e_1']_e & [e_2']_e & \dots & [e_n']_e \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

<u>דוגמא</u>: $V=\mathbb{R}^3$ $e=[e_1,e_2,e_3]$ בסיס סטנד'

$$e'=\left[\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right],$$

נמצא את מטריצת המעבר:

$$C^e_{e'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

<u>תרגיל</u>: עם אותם בסיסים

א) נתון $[v]_{e'} = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ מצאו $[v]_e$

ב) נתון $[u]_e = \begin{pmatrix}1\\1\\5\end{pmatrix}$ מצאו את $[u]_{e'}$

<u>פתרון</u>

א) $$v=[v]_e \quad C^e_{e'}[v]_{e'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\2\\1\end{pmatrix}$$

ב) $(C^e_{e'})^{-1} = C^{e'}_e$

$$[u]_{e'} = C^{e'}_e[u]_e = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1\\1\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\-4\\0\end{pmatrix}$$

<u>הערה</u>: אם $V=U_1\oplus U_2$ ויש לנו בסיסים e_1, e_1' ל-U_1, e_2, e_2' ל-U_2

$e=[e_1,e_2]$, $e'=[e_1',e_2']$ הם בסיסים ל-V ומתקיים

$$C^e_{e'} = \begin{pmatrix} C^{e_1}_{e_1'} & 0 \\ 0 & C^{e_2}_{e_2'}\end{pmatrix}$$

<u>דוגמא</u>: $V=\mathbb{R}_3[x]$ $e=[x^3,x^2,x,1]$ $e'=[x^3-x^2,2x^3+x^2,1+x,1-x]$

נבחר $U_1=\mathrm{Span}\{x^3,x^2\}$ $e_1=[x^3,x^2]$ $e_1'=[x^3-x^2,2x^3+x^2]$

$U_2=\mathrm{Span}\{x,1\}$ $e_2=[x,1]$ $e_2'=[1+x,1-x]$

$$C^{e_1}_{e_1'} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1\end{pmatrix} \quad C^{e_2}_{e_2'} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$C^e_{e'} = \begin{pmatrix} \begin{matrix}1 & 2 \\ -1 & 1\end{matrix} & 0 \\ 0 & \begin{matrix}1 & -1 \\ 1 & 1\end{matrix}\end{pmatrix}$$

הערה: אם e, e', e'' בסיסים אז

$$[v]_e = C^{e}_{e''}[v]_{e''} \qquad [v]_{e'} = C^{e'}_{e''}[v]_{e''}$$

$$[v]_e = C^{e}_{e'}[v]_{e'} = C^{e}_{e'}C^{e'}_{e''}[v]_{e''}$$

$$\Rightarrow \quad C^{e}_{e''} = C^{e}_{e'}C^{e'}_{e''}$$

תרגיל: V מ"ו. $T: V \to V$ לינארית שמקיימת $T = T^2 = T\circ T$.

נגדיר $S = 1 - T$

הוכיחו:

א. $S^2 = S$

ב. $S\circ T = T\circ S$

ג. $\ker S = \operatorname{Im} T$, $\ker T = \operatorname{Im} S$

פתרון:

א. $$S\circ S = (1-T)\circ(1-T) = \underbrace{1\circ 1}_{1} - \underbrace{T\circ 1}_{-T} - \underbrace{1\circ T}_{-T} + \underbrace{T^2}_{T} = 1 - T = S$$

ב. $$(1-T)\circ T = 1\circ T - T^2 = T\circ 1 - T^2 = T\circ(1-T)$$

ג. בבית הוכיחו: $T\circ T = 0 \iff \operatorname{Im} T \subseteq \ker T$

באותו אופן אפשר להוכיח: $S\circ T = 0 \iff \operatorname{Im} T \subseteq \ker S$

במקרה שלנו: $S\circ T = T - T^2 = 0$

$\Leftarrow \quad \operatorname{Im} T \subseteq \ker S$

$Sv = 0 \Leftarrow v \in \ker S$

$\Rightarrow (1-T)v = 0$

$\Rightarrow v - Tv = 0 \iff v = Tv \Rightarrow v \in \operatorname{Im} T$

$\Rightarrow \ker S \subseteq \operatorname{Im} T \Rightarrow \ker S = \operatorname{Im} T$

נשים לב: $S^2 = S$

$T = 1 - S$

ממה שהוכחנו $\Leftarrow$ $\ker T = \operatorname{Im} S$ $\square$