17/3/08

תרגול

<u>הגדרה</u>: עבור $U \subseteq V$, U_1, U_2 תת"מ אומרים ש- $U = U_1 \oplus U_2$ סכום ישר אם $U = U_1 + U_2$ ו- $U_1 \cap U_2 = \{0\}$.

<u>משפט</u>: אם $u \in U_1 \oplus U_2$ ניתן להציג יחידה $u = u_1 + u_2$, $u_i \in U_i$, $i=1,2$

באופן דומה מגדירים $\bigoplus_{i=1}^{k} U_i$

<u>משפט</u>: אם $u \in \bigoplus U_i$ ניתן להציג בצורה יחידה כ- $u = \sum u_i$, $u_i \in U_i$, $i=1,\dots,k$

<u>תרגיל</u>: הוכיחו כי כל מטריצה $A_{n\times n}$ ניתנת להצגה בצורה יחידה כ- $A = B + C$ כאשר B - סימטרית ו- C - אנטי סימטרית, $B = B^t$, $C = -C^t$.

<u>פתרון</u>: נגדיר $S := \{B \in M_n(F) \mid B = B^t\}$

$T := \{C \in M_n(F) \mid C = -C^t\}$

S, T תת"מ של $M_n(F)$. יש להראות ש- $M_n(F) = S \oplus T$. צ"ל:

1) $S + T = M_n(F)$

2) $S \cap T = 0$

1) ניקח $A_{n\times n}$ ונגדיר $A_S = \frac{A+A^t}{2}$, $A_T = \frac{A-A^t}{2}$ אז $A = A_S + A_T \in S+T$

וגם $A_S \in S$ $A_T \in T$.

$$(A_T)^t = \left(\frac{A-A^t}{2}\right)^t = \frac{1}{2}\left(A^t - (A^t)^t\right) = \frac{A^t - A}{2} = -A^t \Rightarrow A_T \in T$$

$\Rightarrow S + T = M_n(F)$

2) אם $A \in S \cap T$ אז $A \in S \Rightarrow A = A^t$ וגם $A \in T \Rightarrow A = -A^t$

$\Rightarrow A^t = A = -A^t \Rightarrow A^t = 0 \Rightarrow A = 0 \Rightarrow S \cap T = 0$ $\square$

<u>הערה</u>: מהמשפט על מימד של סכום:

$\dim(U_1 \oplus U_2) = \dim U_1 + \dim U_2$

ולהיפך אם $\dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2$ אז זה סכום ישר.

במקרה שלנו $\dim S = \frac{n(n+1)}{2}$ (תרגיל) $\Rightarrow \dim T = n^2 - \dim S = \frac{n(n-1)}{2}$

טרנספורמציות לינאריות מעל F

<u>הגדרה</u>: העתקה $f: V \to W$ נקראת ט"ל אם:

1) $f(a+b) = f(a) + f(b)$ $\forall a,b \in V$

2) $f(\lambda a) = \lambda f(a)$ $\forall \lambda \in F, a \in V$

אלגברה לינארית
17.3.08 (תרגול)
②

דוגמאות

$x \longmapsto 0$, $x \in V$, $0 \in W$ (העתקת האפס תמיד העתקה לינארית)

$x \longmapsto x$, $id: V \to V$ (העתקת הזהות 1_V)

$p \longmapsto p'$, $d: \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_{n-1}[x]$ (פולינום)

$V = M_2(\mathbb{R})$, $W = \mathbb{R}$
$$f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a+b+c+d \in \mathbb{R}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$$

דוגמא של לא לינארית: $x \longmapsto x^2$, $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

כי למשל $2\cdot 1 \longmapsto 4 \neq 2 \cdot 1^2$

עוד דוגמא: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ y \end{pmatrix}$$ לינארית

<u>באופן כללי</u>: כל $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ נתונה ע"י $A \in M_{m\times n}$, $x \mapsto A\cdot x$
תמיד לינארית. נובע ממה שהוכחנו עבור כפל מטריצות.

$$A(B+C) = AB + AC$$
$$A(\lambda B) = \lambda(AB)$$

<u>תרגיל</u>: הוכח כי $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ שמוגדרת ע"י
$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ y-z \end{pmatrix}$$ לינארית.

<u>פתרון</u>:
$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ y-z \end{pmatrix}$$
$\square$

<u>משפט</u>: לכל $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ קיימת מטריצה $A_{m\times n}$ כך ש $x \mapsto A\cdot x$

הרכבה של העתקות

עבור כל $T: V \to W$, $S: W \to U$ מוגדרת ההרכבה $S \circ T: V \to U$ שהיא העתקה לינארית.

<u>דוגמא</u>: ①
$T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1+x_2, x_3-x_1)$
$S: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_2[x]$, $S(x_1, x_2) = x_1 \cdot x^2 + x_2 \cdot x + (x_1+x_2)$
$$S\circ T(x_1,x_2,x_3) = S(T(x_1,x_2,x_3)) = S(x_1+x_2, x_3-x_1) =$$
$$= (x_1+x_2)x^2 + (x_3-x_1)x + (x_1+x_2+x_3-x_1) = (x_1+x_2)x^2 + (x_3-x_1)x + (x_2+x_3)$$

אלגברה לינארית
תרגיל 17.3.08
2
3

$$T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \qquad S: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \qquad R: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ y \end{pmatrix} \qquad S\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y \\ y \end{pmatrix} \qquad R\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x+y \end{pmatrix}$$

נשים לב:

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$S\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$R\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$S\circ T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = S\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) =$$

$$= \left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

קיבלנו e $S\circ T = Id$

$$S\circ R\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ x+y \end{pmatrix}$$

$$R\circ S\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$