11/3/07

תרגול 8

נמשיך את התרגיל מאתמול:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & 1 \\ 3 & 5 & 4 & 0 \end{array}\right) \sim (I \mid 0)$$

מעל $\mathbb{Z}_5$ - פתרון יחיד

(גם למערכת ההומוגנית יש פתרון יחיד)

מעל $\mathbb{Z}_7$ -
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & 0 \\ 3 & 5 & 4 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \leftarrow R_3 - 3R_1]{R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftarrow \frac{1}{6} R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_3 \leftarrow R_3 - 2R_2]{R_1 \leftarrow R_1 - R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

מעל $\mathbb{R}$ היינו אומרים שיש אינסוף פתרונות, אבל פה קבוצת הפתרונות היא:

$$\#\left\{ \begin{pmatrix} 3s \\ 3s \\ s \end{pmatrix} \;\middle|\; s \in \mathbb{Z}_7 \right\} = 7$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Z})$$

$B = [A]_5 \in M_3(\mathbb{Z}_5)$

$C = [A]_7 \in M_3(\mathbb{Z}_7)$

$\det A = 7$

$\Rightarrow \det [A]_p = [\det A]_p$

$[kl] = [k][l]$

$[k+l] = [k] + [l]$

$\Rightarrow \det B = [7]_5 = [2] \neq 0$

$\det C = [7]_7 = [0]$

(אז הדטרמיננטה שונה מאפס
המטריצה הפיכה)

מרחב מעל שדה סופי

F - שדה סופי

F^n - מרחב מעל F $\quad \#(F^n) = (\#F)^n$

V מעל F, V ממימד סופי n, ניקח בסיס B של V

יש העתקה $v \mapsto v_{[B]} \in F^n$

$\varphi_B : V \to F^n$

φ_B העתקה חח"ע ועל $\Leftarrow$ $\#V = \#(F^n)$

<u>מסקנה</u>: מ"ו V ממימד סופי מעל שדה סופי F הוא בגודל $(\#F)^n$ איברים.

(פתרונות של מערכת הומוגנית זה תת-מרחב

<u>הערה</u>: אם יש $A \in M_n(\mathbb{R})$ אז אפשר לחשוב על A כמטריצה מרוכבת (כי $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$). כלומר כ- $A \in M_n(\mathbb{C})$

<u>כלל קרמר</u>

עבור מ"מ $(A|b)$ כך ש- A הפיכה ($|A| \neq 0$) קיים פתרון יחיד $x = (x_1, \dots, x_n)$ למערכת ו- $x_i = \frac{|A_i|}{|A|}$

A_i - A עם b במקום העמודה ה-i

<u>תרגיל</u>: פתור

$$\underset{A}{\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & -3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underset{b}{\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}$$

<u>פתרון</u>:

$$|A| = \begin{matrix} -1 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -3 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 2 \end{matrix} = 2+6+0-(-1+6+0) = 3$$

$$|A_1| = 6+6+0-(-1+18+0) = -5 \qquad A_1 = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & -3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow x = -\frac{5}{3}$

$|A_2| = 14 \Rightarrow y = \frac{14}{3} \qquad z = -\frac{12}{3} = -4$

נפתור את אותה מערכת מעל $\mathbb{Z}_2$:

$$x = \frac{[-5]}{[3]} = \frac{[1]}{[1]} = [1]$$

$$y = \left[\frac{14}{3}\right] = \frac{[14]}{[3]} = \frac{[0]}{[1]} = [0]$$

$$z = [-4] = [0]$$

ב- $\mathbb{Z}_2$ יש שני איברים - 0,1 ו- 1 זה ההפכי של עצמו $1=-1$

$\Leftarrow$ בכל שדה עם מציין 2 מתקיים $\forall x : x = -x$

המטריצה המצורפת (adjoint)

A - מטריצה $n\times n$.

הגדרה: $(\operatorname{adj} A)_{ij} = (-1)^{i+j}\cdot M_{ji}$, $\operatorname{adj} A\in M_n(F)$

כאשר M_{ji} זה המינור של A שמתקבל ע"י מחיקת שורה j ועמודה i (בדטרמיננטה של המטריצה).

משפט: לכל $A\in M_n(F)$ (מטריצה מעל שדה כלשהו) מתקיים:

$$\operatorname{adj} A\cdot A = A\cdot \operatorname{adj} A = |A|\cdot I$$

אם A הפיכה: (נכפול ב- A^{-1} מימין)

$$\Rightarrow \operatorname{adj} A = |A|\cdot A^{-1} \iff A^{-1} = \frac{1}{|A|}\cdot \operatorname{adj} A$$

תרגיל: עבור $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\3&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}$ מצאו $\operatorname{adj}A$, A^{-1}

פתרון:

$$\operatorname{adj} A=\begin{pmatrix} +\begin{vmatrix}1&0\\1&1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}2&2\\1&1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}2&2\\1&0\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}3&0\\1&1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1&2\\1&1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1&2\\3&0\end{vmatrix}\\ +\begin{vmatrix}3&1\\1&1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1&2\\1&1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1&2\\3&1\end{vmatrix}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&-2\\-3&-1&6\\2&1&-5\end{pmatrix}$$

(צריך לחשב להראות)

$$|A|=-1 \Rightarrow A^{-1} = -1\cdot \operatorname{adj} A = \begin{pmatrix}-1&0&2\\3&1&-6\\-2&-1&5\end{pmatrix}$$

תרגיל: עבור $A_{n\times n}$, $\operatorname{adj}A\neq 0 \iff \operatorname{rk}A\geq n-1$

פתרון: ראינו באחד התרגילים הקודמים:

$\operatorname{rk}A\geq k \iff$ קיים מינור $k\times k$ ב- A שונה מאפס.

לכן: $\operatorname{rk}A\geq n-1 \iff$ קיים ij כך ש $M_{ji}\neq 0 \iff \operatorname{adj}A\neq 0$

תרגיל: אם A הפיכה מהו $\operatorname{rk}\operatorname{adj}A$? (הדרגה של המטריצה המצורפת)

פתרון: $\operatorname{adj}A\left(\frac{1}{|A|}\cdot A\right)=I \Rightarrow \operatorname{adj}A$ הפיכה

ולכן $\operatorname{rk}\operatorname{adj}A=n$.

מסקנה: אם $\operatorname{rk}A<n-1$ אז $\operatorname{adj}A=0$

תרגיל: נניח $\operatorname{rk}A=n-1$. מהו $\operatorname{rk}\operatorname{adj}A$?

פתרון: $A\cdot \operatorname{adj}A=|A|\cdot I=0$

$\operatorname{rk}\operatorname{adj}A=1$

$\operatorname{rk}A=n-1$, $\operatorname{rk}A+\operatorname{rk}\operatorname{adj}A\leq n$ ולכן 1 [illegible] $\operatorname{adj}A=$

<u>תרגיל</u>: $A, B_{n\times n}$, אם $AB=0$ אז $rkA + rkB \le n$

<u>פתרון</u>: $rkB = \dim R(B) = \dim C(B)$

$$AB=0 \Rightarrow A\cdot\begin{pmatrix} | & & | \\ b_1 & \dots & b_n \\ | & & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & & | \\ 0 & \dots & 0 \\ | & & | \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} | & & | \\ Ab_1 & \dots & Ab_n \\ | & & | \end{pmatrix}$$

לכן: $Ab_i = 0 \Rightarrow C(B) \subseteq N(A)$

$$\underset{\text{span}\{b_1,\dots,b_n\}}{C(B)} \subseteq \underset{\{x \mid Ax=0\}}{N(A)}$$

$b_1,\dots,b_n$ מוכלים ב-$N(A)$ מההגדרה של $N(A)$ ($N(A)$ תת מרחב)

לכן גם ה-span שלהם נמצא ב-$N(A)$.

<u>יודעים</u>: $\dim N(A) = n - rkA$

$$rkB = \dim C(B) \le \dim N(A) = n - rkA$$

$$\Rightarrow rkA + rkB \le n$$

<u>תרגיל</u>: יהיו $\lambda_1,\dots,\lambda_n \in F$

$$A(\lambda_1,\dots,\lambda_n) = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \dots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

מהו rkA ?

<u>תשובה</u>: $rkA = \#\{\lambda_1,\dots,\lambda_n\} = k$

$$rkA \le k$$

אם נניח $\lambda_1,\dots,\lambda_k$ שונים אז השורות מ-$k+1$ והלאה כבר מופיעות בשורות $1,\dots,k$ אז לא מוסיפות ל-span.

נראה: $rkA \ge k$

אז ניקח $A' = A$ בלי שורות $k+1,\dots$ ובלי עמודות $k+1,\dots$.

$$A' = A(\lambda_1,\dots,\lambda_k) \Rightarrow |A'| \neq 0$$

(כי ה-λ השונות שונות, כלומר אף שורה לא מתאפסת)

(לפי המשפט של המינור הגדול A'-$k\times k$ הוא המינור מסדר k)

$$\Rightarrow rkA = k$$

<u>טענה</u>: כל פולינום מדרגה n שמתאפס ב- $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ הוא

מהצורה $a(x-\lambda_1)\dots(x-\lambda_n)$, $a\in F$

<u>הוכחה</u>: ניקח $\lambda\notin\{\lambda_1,\dots,\lambda_n\}$ אזי נניח $p(\lambda)=c$, $p(\lambda_i)=0$

אזי p נקבע ביחידות, לכן

$$p=\overset{a}{\overset{\|}{\left(\frac{c}{\prod(\lambda-\lambda_i)}\right)}}(x-\lambda_1)\dots(x-\lambda_n)$$

<u>דרך ב'</u>: נסדיר

$$A=\begin{pmatrix}1 & \lambda_1 & \dots & \lambda_1^n\\ 1 & \vdots & & \\ \vdots & \vdots & & \\ 1 & \lambda_n & \dots & \lambda_n^n\end{pmatrix}_{n\times(n+1)}\begin{pmatrix}|\\x\\|\end{pmatrix}=0$$

$rkA=n$ לכן $\dim N(A)=n+1-n=1$

אם $Ax=0$ אזי x זה וקטור מקדמים של פולינום שמתאפס ב- $\lambda_1,\dots,\lambda_n$

$\Rightarrow P=\{av\mid a\in F\}$

$\underset{\neq 0}{\prod(x-\lambda_i)}\in P \Rightarrow P=\{a\prod(x-\lambda_i)\}$

<u>משפט</u>: יהיו $U,W\subseteq V$ תת"מ

$$\dim(U+W)=\dim U+\dim W-\dim(U\cap W)$$

$$\Longleftrightarrow \dim(U\cap W)=\dim U+\dim W-\dim(U+W)$$

<u>תרגיל</u>: $V=\mathbb{R}^3$

$$U=\mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$$

$$W=\mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

מצאו את $U\cap W$.

<u>פתרון</u>:

$$\mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}\subseteq U\cap W$$

$$\dim U\cap W=\dim U+\dim W-\dim(U+W)=2+2-3=1$$

(המימד הוא לא יותר 3 כי $U+W\in\mathbb{R}^3$, ולפחות 2 כי $U\subseteq U+W$

אבל לא שווה ל-2 כי הווקטור $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ לא נמצא ב- U

ומכאן שהוא שווה ל-3) $\Rightarrow U\cap W=\mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$

<u>תרגיל</u>: $\dim V=n$, עבור $U,W\subseteq V$ $\dim W=n-1$ $\dim U=k$

$U\not\subseteq W$ הוכיחו $\dim U\cap W=k-1$

<u>פתרון</u>: $\dim U+W=n \Leftarrow W\subsetneq \overset{V}{\overset{\|}{U+W}} \Leftarrow U\not\subseteq W$

$\Rightarrow \dim U\cap W=k+n-1-n=k-1$