4/3/08 ①

תרגול 16

תמורות

$$\sigma = (i_1, \dots, i_k) \qquad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

דוגמא: $(1\ 3\ 5) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \dots & n \\ 3 & 2 & 5 & 4 & 1 & 6 & \dots & n \end{pmatrix}$

הרכבה

אם $\sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma_n$, $\sigma_1, \sigma_2 : X_n \to X_n$ אז אפשר להרכיב ולקבל $\sigma_1 \sigma_2 \in \Sigma_n$

איך לחשב?

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix} \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_1 \circ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

לכל תמורה יש הופכי: $\sigma \in \Sigma_n \Rightarrow \sigma^{-1} \in \Sigma_n$

נחשב את ההפכי של σ_1^{-1}:

$$\sigma_1^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix} = \sigma_1$$

(במקרה)

דוגמא נוספת: $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

תכונות ההפכי: $\sigma^{-1} \circ \sigma = \sigma \circ \sigma^{-1} = 1_{X_n} \qquad 1_{X_n} : X_n \to X_n,\ x \mapsto x$

סימן של תמורה: **הגדרה**: נגדיר עבור $\sigma \in \Sigma_n$ מטריצה $P_{\sigma\, n\times n} =$ מטריצת היחידה שהפעלנו על השורות שלה את σ

$$R_i(P_\sigma) = R_{\sigma^{-1}(i)}(I)$$

דוגמא: $\sigma = (1\ 2\ 3)$ $(\sigma(1) = 2 \dots)$ נפעיל על מטריצת היחידה $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ את התמורה σ ונקבל

$$P_\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

אז $R_i(P_\sigma) = R_j(I)$ אם $\sigma(j) = i \iff j = \sigma^{-1}(i)$

נגדיר: $\operatorname{sgn}(\sigma) := \det(P_\sigma)$

משפט:

1) $P_{(\sigma_1 \circ \sigma_2)} = P_{\sigma_1} \cdot P_{\sigma_2}$

2) $(P_\sigma)^t = P_{(\sigma^{-1})} = (P_\sigma)^{-1}$

אלגברה לינארית-תרגול 3 (2) 4.3.08

עבור $A_{n\times m}$ אז $A = P_\sigma A$ שהפעילו על השורות שלה את התמורה σ.

כנ"ל עבור $A_{m\times n}$ - $A = A\cdot P_\sigma$ שהפעילו על העמודות שלה את התמורה σ.

<u>מסקנות</u>:

1) $sgn(\sigma_1 \circ \sigma_2) = sgn(\sigma_1)\cdot sgn(\sigma_2)$

2) $sgn(\sigma) = sgn(\sigma^{-1})$ (ההופכי לא משנה את הסימן)

3) נסמן $P_\sigma A = A'$ אז $\det A' = sgn(\sigma)\det A$

<u>משפט</u>:

$$sgn = (-1)^{\#\{(i,j)\in X_n\times X_n \mid j>i,\ \sigma(i)>\sigma(j)\}}$$

(תת קבוצה של זוגות מ-1 עד n כך ש $i<j$)

<u>בפרט</u>: $sgn(\sigma) = \pm 1$

(סימן של כל תמורה זה ± 1)

<u>דוגמא</u>: $\sigma = (1\ 2)$

$$(1\ 2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 2 & 1 & 3 & \dots & n \end{pmatrix}$$

$$sgn(\sigma) = (-1)^{\#\{(1,2)\}} = -1$$ (יש היפוך אחד כלומר זוג אחד הפוך)

$\sigma = (1\ 4)$

$$(1\ 4)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & n \\ 4 & 2 & 3 & 1 & 5 & \dots & n \end{pmatrix}$$

$$sgn(\sigma) = (-1)^{\#\{(1,2),(1,3),(1,5),(2,4),(3,4)\}} = (-1)^5 = -1$$

באופן יותר כללי: אם $\sigma = (a\ b)$, $a\neq b$ $\Leftarrow$ $P_\sigma = (R_a \longleftrightarrow R_b)(I)$

$\Rightarrow \det(P_\sigma) = -1$

<u>מסקנה</u>: בכל חילוף מספר הזוגות שמתחלפים במקום הוא אי-זוגי. (כי התמורה צריכה להיות אי-זוגית)

באופן כללי: נתון $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 3 & 2 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

$sgn(\sigma)$: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 3 & 2 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

מספר ההיפוכים זה מספר החיתוכים לכן $sgn(\sigma) = (-1)^9 = -1$

<u>הגדרה</u>: תהי $(a_{ij}) = A_{n\times n}$, $\sigma \in \Sigma_n$. <u>נסמן</u>: $I_\sigma(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}$

<u>דוגמא</u>: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $I_\sigma(A) = a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31} = 3\cdot 1\cdot 2 = 6$

$(A) = 2\cdot 0\cdot 5 = 0$ $\quad \sigma = (1\ 2)$

משפט: $\det A = \sum_{\sigma\in\Sigma_n} sgn(\sigma)\cdot I_\sigma(A)$

הערה: $\#\Sigma_n = n!$ לכן זו לא נוסחה טובה לחישובים באופן כללי.

דוגמאות: *

$$\det\overbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}^{A} = 1\cdot ad + (-1)\cdot bc$$

$$\Sigma_2 = \{ \underset{\sigma_1}{\mathbb{1}}, \underset{\sigma_2}{(1\ 2)} \}$$

(מטריצה מסדר 2x2 יש 2 תמורות בלבד)

$$\det A = \overset{1}{sgn\,\sigma_1}\,\underset{ad}{I_{\sigma_1}(A)} + \overset{-1}{sgn\,\sigma_2}\,\underset{bc}{I_{\sigma_2}(A)} = ad - bc$$

* דטרמיננטה 3x3:

$$\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{array} \quad \text{(סך הכל 6 תמורות)} \quad =$$

אפשר לבדוק: תמורות שמתאימות לאלכסון \ עם סימן + ותמורות שמתאימות לאלכסון / הן עם סימן -.

$$= aei + bfg + cdh - (bdi + afh + ceg)$$

טענה: אם $A\in M_n(\mathbb{Z})$ (מטריצה עם מקדמים שלמים) אז $\det A\in\mathbb{Z}$

הוכחה: לכל $\sigma\in\Sigma_n$, $I_\sigma(A)$ זה מכפלה של מספרים שלמים ולכן זה מספר שלם, כלומר, $I_\sigma(A)\in\mathbb{Z}$. ולכן $\det A = \sum sgn(\sigma) I_\sigma(A) \in \mathbb{Z}$ ⊠

(אם היה $\mathbb{N}$ במקום $\mathbb{Z}$ זה לא היה נכון שה-det שייך ל-$\mathbb{N}$ שכן ה-sgn אינו חיובי)

מסקנה: אם $A\in M_n(\mathbb{Z})$ הפיכה ו-$A^{-1}\in M_n(\mathbb{Z})$ אז $\det A=\pm 1$.

הוכחה: $\det A\in\mathbb{Z}$, $\frac{1}{\det A} = \det A^{-1}\in\mathbb{Z}$ $\Leftarrow$ $\det A = \pm 1$ ⊠

(רק 1 ו- -1 הם מספרים שלמים, כל מספר אחר שלם ההופכי שלו לא שלם)

הערה: באותה צורה $A\in M_n(\mathbb{Q}) \Rightarrow \det A\in\mathbb{Q}$

תרגיל: יהיו $A_{n\times n}$, $B_{m\times m}$, $C=\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B\end{pmatrix}$. הוכיחו כי $\det C = \det A\cdot\det B$.

הוכחה: $\det C = \sum_{\sigma\in\Sigma_{n+m}} sgn(\sigma)\, I_\sigma(C)$

אם קיים $1\le i\le n$ כך ש- $\sigma(i) > n$ אז $I_\sigma(C)=0$

אלגברה
לינארית-תרגול
4.3.08
(שיעור) 4

שדות

קבוצה F עם הפעולות $+$, $\cdot$ שמקיימת

1) אסוס $(a+b)+c = a+(b+c)$

$a\cdot(b\cdot c) = (a\cdot b)\cdot c$

2) קומוט $ab = ba$

$a+b = b+a$

3) קיימים איברים נייטרלים לכפל וחיבור 0 , 1

4) קיים הפכי יחיד לכל $x\neq 0 \in F$ וקיים נגדי יחיד לכל $x\in F$ $-x$

דוגמאות לשדות:

$\mathbb{C}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ - שדות

$\mathbb{Z}$ - לא שדה כי אין הפכי לכפל.

$M_n(\mathbb{R})$ - לא שדה כי אין קומוטטיביות כפל (וגם אין הפכי).

$\mathbb{Q}_+$ - לא שדה כי אין נגדי.

תרגיל: בכל שדה מתקיים $(-1)\cdot a = -a$.

פתרון: צ"ל: $(-1)\cdot a + a = 0$

$$(-1)\cdot a + 1\cdot a = ((-1)+1)\cdot a = 0\cdot a$$

$$0\cdot a = (0+1)\cdot a = a \quad / + (-a)$$

$$\Leftrightarrow (0\cdot a + a) + (-a) = a + (-a)$$

$$(0\cdot a + a) + (-a) = 0\cdot a + (a + (-a)) = 0\cdot a, \quad a+(-a) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 0\cdot a = 0$$

אלגברה לינארית - תרגול 4.3.98
(5) (המשך)

אם קיים $n+1 \le i \le n+m$ כך ש $\sigma(i) < n+1$ אז $I_\sigma(C)=0$.

<u>נגדיר</u>

$$\Sigma_{n;m} = \left\{ \sigma \in \Sigma_{n+m} \;\middle|\; \begin{array}{l} \sigma(\{1,\dots,n\}) \subseteq \{1,\dots,n\} \\ \sigma(\{n+1,\dots,n+m\}) \subseteq \{n+1,\dots,n+m\} \end{array} \right\}$$

$$\Leftarrow \quad \det C = \sum_{\sigma\in\Sigma_{n,m}}$$

נסמן
$$\sigma_1 = \begin{cases} \sigma(i), & i=1,\dots,n \\ i, & i>n \end{cases} \qquad \sigma_2 = \begin{cases} \sigma(i), & i=n+1,\dots,n+m \\ i, & i<n+1 \end{cases}$$

מתקיים: $\sigma = \sigma_1 \circ \sigma_2$

אם נתונים לנו $\sigma_1 \in \Sigma_n$, $\sigma_2 \in \Sigma_m$ אז נגדיר

$$\sigma_1 * \sigma_2 = \begin{cases} \sigma_1(i), & i=1,\dots,n \\ \sigma_2(i-n), & i>n \end{cases}$$

<u>סה"כ</u>

$$\det C = \sum_{\sigma_1\in\Sigma_n}\sum_{\sigma_2\in\Sigma_n} \mathrm{sgn}(\sigma_1*\sigma_2) I_{\sigma_1*\sigma_2}(C)$$

מתקיים
$$\mathrm{sgn}(\sigma_1*\sigma_2) = \mathrm{sgn}\,\sigma_1 \cdot \mathrm{sgn}\,\sigma_2$$
$$I_{\sigma_1*\sigma_2}(C) = I_{\sigma_1}(A)\cdot I_{\sigma_2}(B)$$

$$\Leftarrow \quad \det C = \sum_{\sigma_1\in\Sigma_n}\sum_{\sigma_2\in\Sigma_n} \mathrm{sgn}\,\sigma_1\,\mathrm{sgn}\,\sigma_2\, I_{\sigma_1}(A) I_{\sigma_2}(B)$$

$$= \underbrace{\left(\sum_{\sigma_1\in\Sigma_n} \mathrm{sgn}\, I_{\sigma_1}(A)\right)}_{\det A}\underbrace{\left(\sum \mathrm{sgn}\,\sigma_2\, I_{\sigma_2}(B)\right)}_{\det B} = \det A \det B \qquad \square$$

<u>הערה</u>: באינדוקציה אפשר לקבל

$$\det \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_k \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^{k} \det A_i$$

A, B

<u>תרגיל</u>:

$$\begin{vmatrix} 0 & & 1 \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ 1 & & 0 \end{vmatrix}_{n\times n} = ?$$

A

$$A = P_\sigma \qquad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ n & n-1 & \cdots & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftarrow \quad \det A = \mathrm{sgn}\,\sigma$$

מתי (i,j) $i<j$ מקיימים $\sigma(i)>\sigma(j)$?

<u>$i=1$</u>: $(1,2),\dots,(1,n)$ — $n-1$

<u>$i=2$</u>: $(2,3),\dots,(2,n)$ $n-2$ אז סך הכל נקבל $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$

$\vdots$

(שורה תחתונה שקיבלנו פה: רק

$i=n-1$ ... $(n-1, n)$ ... [illegible]

04/03/08
① (שלי)

לינארית - אלגברה

תמורות

$\sigma=(i_1,\dots,i_k)$

$$\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & \dots & n\\ \sigma(1) & \sigma(2) & & \dots & \sigma(n)\end{pmatrix}$$

$$(1\,3\,5)=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \dots & n\\ 3 & 2 & 5 & 4 & 1 & 6 & \dots & n\end{pmatrix}$$

הרכבה

אם $\sigma_1,\sigma_2\in\Sigma_n$ $\quad$ $\sigma_1,\sigma_2:\to X_n$ אז אפשר להרכיב ולקבל $\sigma_1\circ\sigma_2\in\Sigma_n$

איך לחשב?

$$\sigma_1=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&1&3&5&4\end{pmatrix}\qquad \sigma_2=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&3&5&4&1\end{pmatrix}$$

$$\sigma_1\circ\sigma_2=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\1&3&4&5&2\end{pmatrix}$$

$$\sigma\in\Sigma_n \Rightarrow \sigma^{-1}\in\Sigma_n$$

$$\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&1&3&5&4\end{pmatrix}$$

$$\sigma^{-1}=\begin{pmatrix}2&1&3&5&4\\1&2&3&4&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&1&3&5&4\end{pmatrix}=\sigma$$ במקרה

$$\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}\qquad \sigma^{-1}=\begin{pmatrix}2&3&1\\1&2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$$

$$\sigma^{-1}\circ\sigma=\sigma\circ\sigma^{-1}=\mathbb{1}_{X_n}$$

$$\mathbb{1}_{X_n}:X_n\to X_n \qquad x\longmapsto x$$

סימן של תמורה:

הגדרה:

נגדיר עבור $\sigma\in\Sigma_n$ מטריצה $P_{\sigma\,n\times n}$ = מטריצת היחידה

שהפעלנו על השורות שלה את σ. $\quad R_i(P_\sigma)=R_{\sigma^{-1}(i)}(I)$

$$I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\qquad P_\sigma=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$$

אם $R_i(P_\sigma)=R_j(I)$ אז $j=\sigma^{-1}(i) \Leftrightarrow \sigma(j)=i$

4.3.08
(שני) 7

אלגברה לינארית - תרגול

נגדיר: $sgn(\sigma) := \det(P_\sigma)$

מתקיים:

1) $P_{(\sigma_1\circ\sigma_2)} = P_{\sigma_1}\cdot P_{\sigma_2}$

2) $(P_\sigma)^t = P_{(\sigma^{-1})} = (P_\sigma)^{-1}$

3) עבור מטריצה $A_{n\times m}$ אז $A' = P_\sigma A$ שהפעלנו על השורות שלה את התמורה σ.
כנ"ל עבור מטריצה $A_{m\times n}$ $A' = A P_\sigma$ שהפעלנו על העמודות שלה את התמורה σ.

מסקנות:

1) $sgn(\sigma_1\circ\sigma_2) = sgn(\sigma_1)\cdot sgn(\sigma_2)$

2) $sgn(\sigma) = sgn(\sigma)^{-1}$

3) (סמן) $P_\sigma A = A'$ אז $\det A' = sgn(\sigma)\cdot\det(A)$

משפט: $sgn(\sigma) = (-1)^{\#\{(i,j)\in X_n\times X_n \mid j>i,\ \sigma(i)>\sigma(j)\}}$

בפרט: $sgn(\sigma) = \pm 1$

דוגמאות:

א) $\sigma = (1,2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 2 & 1 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix}$ $\quad sgn(\sigma) = (-1)^{\#\{(1,2)\}} = -1$

א) $\sigma = (1\ n) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots & n \\ 4 & 2 & 3 & 1 & 5 & \cdots & n \end{pmatrix}$ $\quad sgn(\sigma) = (-1)^{\#\{(1,2),(1,3),(1,4),(2,4),(3,4)\}} = -1$

באופן יותר כללי אם $\sigma = (a\ b)$ $a\neq b \Leftarrow$
$\Rightarrow P_\sigma = (R_a \leftrightarrow R_b)(I) \Rightarrow \det(P_\sigma) = -1$

מסקנה: בכל תילוף, מספר הזוגות שמתהפכים במקום הוא אי-זוגי.

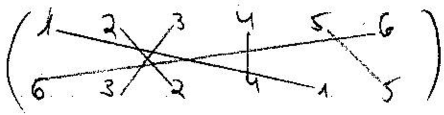
4.3.08
([illegible]) 3

אלגברה לינארית - תרגול

באופן כללי:

נתון: $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\6&3&2&4&1&5\end{pmatrix}$

$sgn(\sigma)$:



$$sgn(\sigma) = (-1)^9=-1$$

הגדרה: תהי $A_{n\times n}-(a_{ij})$, $\sigma\in S_n$. נסמן: $I_\sigma(A)=\prod_{i=1}^{n}a_{i\sigma(i)}$

דוגמא: $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&0\\2&4&5\end{pmatrix}$ $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$ $I_\sigma(A)=\overset{a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31}}{3\cdot 1\cdot 2}=6$

$\sigma=(1\ 2)$ $I_\sigma(A)=2\cdot 0\cdot 5=0$

משפט: $$\det A=\sum_{\sigma\in S_n} sgn(\sigma)\cdot I_\sigma(A)$$

הערה: $\#S_n=n!$ לכן זו לא נוסחא טובה לחישובים באופן כללי.

דוגמא: $\det\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=1\cdot ad+(-1)\cdot bc$

$$S_2=\{\underset{\sigma_1}{1},\ \underset{\sigma_2}{(1,2)}\}$$

$$=\overset{1}{sgn\,\sigma_1}\ \underset{ad}{I_{\sigma_1}(A)}+\overset{-1}{sgn\,\sigma_2}\ \underset{bc}{I_{\sigma_2}(A)}=ad-bc$$

בדטרמיננטה 3x3:

אפשר לבדוק: תמורה שמתאימה לאלכסון \ עם סימן + ותמורה שמתאימה לאלכסון / עם סימן −.

$$\begin{array}{ccc|cc}1&2&3&1&2\\ a&b&c&a&b\\ d&e&f&d&e\\ g&h&i&g&h\end{array}$$

$$=aei+bfg+cdh-(bdi+afh+ceg)$$

4.3.08
(ג׳יל) ④

אלגברה לינארית - תרגול

טענה: אם $A \in M_n(\mathbb{Z})$ (מטריצה עם מקדמים שלמים)
אז $\det A \in \mathbb{Z}$.

הוכחה:
לכל $\sigma \in \Sigma_n$, $I_\sigma(A)$ - מכפלה של מספרים שלמים.
ולכן $I_\sigma(A) \in \mathbb{Z}$, ולכן $\det A = \sum sgn(\sigma) I_\sigma(A) \in \mathbb{Z}$ ☒

מסקנה:
אם $A \in M_n(\mathbb{Z})$ הפיכה ו- $A^{-1} \in M_n(\mathbb{Z})$ אז $\det A = \pm 1$

הוכחה:
$\det A = \mathbb{Z}$ $\quad \frac{1}{\det A} = \det A^{-1} \in \mathbb{Z}$.
$\Leftarrow \det A = \pm 1$ ☒

הערה: באותה צורה: $A \in M_n(\mathbb{Q}) \Rightarrow \det A \in \mathbb{Q}$

תרגיל:
יהי $A_{n\times n}$ $B_{m\times m}$ $C = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ תוכיח כי: $\det C = \det A \cdot \det B$

הוכחה:
$$\det C = \sum_{\sigma \in \Sigma_{n+m}} sgn(\sigma) I_\sigma(C)$$

אם קיים $1 \le i \le n$ כך ש- $\sigma(i) > n$ אז $I_\sigma(C) = 0$.
-״- $n+1 \le i \le n+m$ כך ש- $\sigma(i) < n+1$ אז $I_\sigma(C) = 0$
נגדיר: $\Sigma_{n,m} = \left\{ \sigma \in \Sigma_{n+m} \;\middle|\; \begin{array}{l} \sigma(\{1,\dots,n\}) \subseteq \{1,\dots,n\} \\ \sigma(\{n+1,\dots,n+m\}) \subseteq \{n+1,\dots,n+m\} \end{array} \right\}$
$\Leftarrow \det C = \sum_{\sigma \in \Sigma_{n,m}}$.

נסמן $\sigma_1 = \begin{cases} \sigma(i) & i = 1,\dots,n \\ i & i > n \end{cases}$ $\quad \sigma_2 = \begin{cases} \sigma(i) & n+1,\dots,n+m \\ i & i < n+1 \end{cases}$

מתקיים: $\sigma = \sigma_1 \circ \sigma_2$
אם נתונים לנו $\sigma_1 \in \Sigma_n$ $\sigma_2 \in \Sigma_m$
אז נגדיר $\sigma_1 * \sigma_2 = \begin{cases} \sigma_1(i) & i = 1,\dots,n \\ \sigma_2(i-n) & i > n \end{cases}$

סה"כ: $\det C = \sum_{\sigma_1 \in \Sigma_n} \sum_{\sigma_2 \in \Sigma_m} sgn(\sigma_1 * \sigma_2) I_{\sigma_1 * \sigma_2}(C)$

מתקיים $sgn(\sigma_1 * \sigma_2) = sgn\,\sigma_1 \cdot sgn\,\sigma_2$

$I_{\sigma_1 * \sigma_2}(C) = I_{\sigma_1}(A) \cdot I_{\sigma_2}(B)$

$$\Rightarrow \det C = \sum_{\sigma_1 \in \Sigma_n} \sum_{\sigma_2 \in \Sigma_m} sgn\,\sigma_1\, sgn\,\sigma_2\, I_{\sigma_1}(A) I_{\sigma_2}(B)$$

$$= \underbrace{\left(\sum_{\sigma_1 \in \Sigma_n} sgn\,\sigma_1 I_{\sigma_1}(A) \right)}_{\det A} \underbrace{\left(\sum_{\sigma_2 \in \Sigma_m} sgn\,\sigma_2 I_{\sigma_2}(B) \right)}_{\det B}$$

$$= \det A \det B \quad \blacksquare$$

הערה: באינדוקציה אפשר לקבל:

$$\det = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_k \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^{k} \det A_i$$

A

B

תרגיל: $\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = ?$

$A = P_\sigma \qquad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ n & n-1 & \cdots & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \det A = sgn\,\sigma$

מתי (i,j) $i<j$ מקיימים $\sigma(i) > \sigma(j)$?

$i=1$: $(1,2), \ldots, (1,n)$ - $n-1$

$i=2$: $(2,3), \ldots, (2,n)$ - $n-2$

$\vdots$

$i=n-1$: - $\underbrace{1}_{\text{מספר חילופים}}$

$\frac{n(n-1)}{2}$

4.3.08
(ב'ל) ⑥

אלגברה לינארית - תרגול

שדה:

הגדרה F עם פעולות $+,\bullet$ שמקיימת:

1) $(a+b)+c = a+(b+c)$

$a(b\cdot c) = (a\cdot b)\cdot c$

2) קומוטטיביות: $ab=ba$ $\quad a+b=b+a$

3) קיימים איברים ניטרליים לכפל ולחבור $1,0$.

4) קיים הפכי יחיד לכל $0\neq x\in F$ ← x^{-1}, $\frac{1}{x}$.

וקיים נגדי יחיד לכל $x\in F$ ← $-x$.

דוגמאות:

$\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{C}$ - שדות

$\mathbb{Z}$ - לא שדה - אין הפכי.

$M_n(\mathbb{R})$ - לא שדה - אין קומט' כפל.

$\mathbb{Q}_+$ - אין נגדי.

תרגיל:

בכל שדה מתקיים $(-1)\cdot a = -a$

פתרון:

צ"ל: $(-1)\cdot a + a = 0$

$$(-1)\cdot a + 1\cdot a = (-1+1)\cdot a = 0\cdot a$$

$$0\cdot a + a = (0+1)a = a \quad / +(-a)$$

$$\Longleftrightarrow (0\cdot a + a) + (-a) = a + (-a)$$

$$(0\cdot a + a) + (-a) = 0\cdot a + (a+(-a)) = 0\cdot a, \qquad a+(-a) = 0$$

$$\Longleftrightarrow 0\cdot a = 0$$