22.10.07 ①

תרגול אלגברה לינארית 1

אדם גל פוסטקוביסקי adam gal@post.tau.ac.il

- חובת הגשת תרגילים וכו'
- שעת הקבלה: יום שלישי 11:00-12:00

שדה המס המרוכבים $\mathbb{C}$

$$\mathbb{C} = \{ \underbrace{a+ib}_{a,b} \mid a \in R, b \in R \}$$

R - מספרים ממשיים

$$(a+ib)+(c+id) = (a+c)+i(b+d)$$

$i = \sqrt{-1}$

$$(a+ib)(c+id) = (ac-bd)+i(ad+bc)$$

$i^2 = -1$

$$0 + i \cdot 1 = i$$

$$0 + ib = ib$$

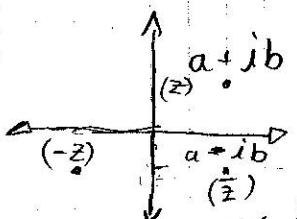
$$a + i \cdot 0 = a$$

כאשר אין אמרקבלה המכלת בתוך אותה קבוצה

$$\{a + i \cdot 0\} \subset \mathbb{C}$$

$$\{1,2\} \subset \{1,2,3\}$$

אם הקבוצה הזו מכלת בתוך הקבוצה שמימין



$\mathbb{R}^2$

$z = x + iy$ ← z מכנה מספר מרוכב

$\bar{z} = x + i(-y) = x - iy$ צמוד

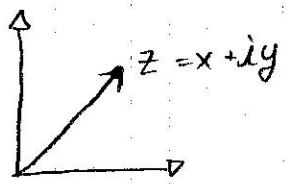
$Re(z) = x$ — חלק ממשי של z

$Im(z) = y$ — חלק מדומה של z

$Re()$ ו- $Im()$ תמיד יהיו שייכים למספרים ממשיים

$|z| = \sqrt{x^2+y^2}$ — אורך של z / מרחק z / רדיוס z

אורך הוקטור / אורך מנקודת מוצא הקורדינטות



$z_1 = x_1 + iy_1 \qquad z_2 = x_2 + iy_2$

$\overline{z_1} + \overline{z_2} = \overline{z_1 + z_2}$

$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

$\overline{z_1} + \dots \overline{z_n} = \overline{z_1 + \dots + z_n}$

$\overline{z_1} + \dots \overline{z_{n-1}} + \overline{z_n} = \overline{z_1 + \dots + z_{n-1}} + \overline{z_n} = \overline{z_1 + \dots + z_n}$

אינדוקציה

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

$P(1) =$ נכון

$P(n) =$ נכון $\Rightarrow P(n+1) =$ נכון

<u>הערה:</u>

$\forall$ — סמן "לכל"

$\forall z \in \mathbb{C} : z \cdot \overline{z} = |z|^2$

לכל z ב- $\mathbb{C}$ — מתקיים

$\underbrace{(x+iy)}_{z}\underbrace{(x-iy)}_{\overline{z}} = x^2 - i^2y^2 = x^2 + y^2$

$\underbrace{z \cdot \overline{z}}_{\text{תמיד מספר ממשי}} \in \mathbb{R}$

22.10.07 ③

תרגיל

רוצים למצוא לכל $z \in \mathbb{C}$

$z' \in \mathbb{C}$ כך ש $z \cdot z' = 1$

$$\frac{1}{z} \cdot 1 = \frac{1}{z} \cdot \frac{\bar{z}}{\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}} = \frac{x - iy}{|z|^2}$$

$$z' = \frac{x}{x^2+y^2} \pm i\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right)$$

$$\overbrace{\left[\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) + i\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right)\right]}^{z'} \overbrace{\left[x+iy\right]}^{z} = \frac{\overset{1}{\cancel{x^2+y^2}}}{\cancel{x^2+y^2}} + i \cdot 0 = 1$$

$z^{-1}, \frac{1}{z}$ $\quad z, w \in \mathbb{C}$ $\quad \frac{z}{w} = z \cdot w^{-1}$

דוגמא:

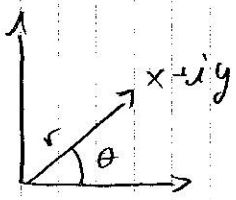
$$\frac{1}{1+i} = \frac{1}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i} = \frac{1-i}{2}$$

$|1+i| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$|x+iy| := \sqrt{x^2+y^2}$

$$\frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{2}$$

הצגה פולרית



נניח $z = x+iy \neq 0$ נסמן ל θ:

$$\left|\frac{z}{|z|}\right| = 1 \qquad \frac{z}{|z|} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + i\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

מיזג של גר

$$\sqrt{\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}} = 1$$

$$a^2+b^2 = 1$$

Linear algebra 1 - Exercise 1

1. (a) Let $z = 3 + 2i$ and $w = -5 + 3i$. Compute zw and $\dfrac{z}{w}$;

   (b) Calculate $\left|\frac{1}{i} - \frac{4+i}{3+2i}\right|$;

   (c) Find all the roots of order 4 for $z = -2 - 2\sqrt{3}i$;

   (d) Compute $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)^{16} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^{10}$;

   (e) Solve the quadratic equation $(1 - i)z^2 + (1 + 3i)z + (-4 + 2i) = 0$.

2. Prove the following statements:

   (a) $\overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}$;

   (b) $|zw| = |z||w|$;

   (c) Use the trigonometric identities to show that

   $$(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\phi + i\sin\phi) = \cos(\theta + \phi) + i\sin(\theta + \phi)\ ;$$

   (d) Let $z = r_1 e^{i\theta}$ and $w = r_2 e^{i\phi}$ be complex numbers. Derive from (a-c) the multiplication rule: $zw = r_1 r_2 e^{i(\theta+\phi)}$;

   (e) Show than in the case when $w \neq 0$

   $$\frac{z}{w} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta-\phi)}\ .$$

3. Prove the following properties of complex numbers:

   (a) $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}$;

   (b) $z^3\overline{z} + \overline{z}^3 z$ is real for all $z \in \mathbb{C}$;

   (c) $|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)$;

   (d)* $\frac{z+w}{1+zw}$ is real whenever $|z| = |w| = 1$ and $zw \neq -1$;

4. Find the expression for $\sin 5x$ in terms of $\sin^k x$ and $\cos^k x$ for natural k.

5. Let $p = x^5 + 3x^3 - 2x^2 + 10$ be a polynomial with real coefficients. Prove: if $z \in \mathbb{C}$ is a complex root of p, then $\overline{z}$ is also a root.