03/03/08

אלגברה ליניארית - תרגול

תרגיל: שאלה 13 מתרגיל 7 (צריך להבין-זאת שאלה ברמה של מבחן).

יהיו $\lambda_1,\dots,\lambda_n\in\mathbb{R}$ שונים:

$$A(\lambda_1,\dots,\lambda_n)=\begin{pmatrix}1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^{n-1}\\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_2^{n-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \cdots & \lambda_n^{n-1}\end{pmatrix}$$

חשבו את:

$$V(\lambda_1,\dots,\lambda_n):=\det(A(\lambda_1,\dots,\lambda_n))$$

פתרון:

$$|A| \underset{\substack{R_i\leftarrow R_i-R_1\\ i=2,\dots,n}}{=} \begin{vmatrix}1 & \lambda_1 & \cdots & \cdots & \lambda_1^{n-1}\\ 0 & \lambda_2-\lambda_1 & \lambda_2^2-\lambda_1^2 & \cdots & \lambda_2^{n-1}-\lambda_1^{n-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & \lambda_n-\lambda_1 & \lambda_n^2-\lambda_1^2 & \cdots & \lambda_n^{n-1}-\lambda_1^{n-1}\end{vmatrix}$$

לפי עמודה 1

$$\overset{(*)}{=}\begin{vmatrix}\lambda_2-\lambda_1 & \cdots & \lambda_2^{n-1}-\lambda_1^{n-1}\\ \vdots & & \\ \lambda_n-\lambda_1 & \cdots & \lambda_n^{n-1}-\lambda_1^{n-1}\end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}$$

$(*)$ $\alpha^k-\beta^k=(\alpha-\beta)\cdot(\alpha^{k-1}+\alpha^{k-2}\beta+\dots+\alpha\beta^{k-2}+\beta^{k-1})$

$$\underset{\substack{R_i\leftarrow \frac{1}{\lambda_{i+1}-\lambda_1}R_i\\ i=1,\dots,n-1}}{=}\prod_{n\ge i\ge 1}(\lambda_i-\lambda_1)\begin{vmatrix}1 & \lambda_2+\lambda_1 & \lambda_2^2+\lambda_2\lambda_1+\lambda_1^2 & \cdots & \lambda_2^{n-2}+\dots+\lambda_1^{n-2}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & \lambda_n+\lambda_1 & \cdots & & \end{vmatrix} \overset{\text{דף הבא}}{=}$$

עכשיו כל שורה נראית כך:

$$R_i:\ (1,\ \lambda_i+\lambda_1,\ \lambda_i^2+\lambda_i\lambda_1+\lambda_1^2,\ \dots,\ \lambda_i^{n-2}+\dots+\lambda_1^{n-2})$$

$$\xrightarrow{\substack{C_2\leftarrow C_2-\lambda_1C_1\\ C_3\leftarrow C_3-\lambda_1^2C_1\\ \vdots}}\ (1,\ \lambda_i,\ \lambda_i^2+\lambda_i\lambda_1,\ \dots,\ \lambda_i^{n-2}+\dots+\lambda_i\lambda_1^{n-3})$$

$$\xrightarrow{\substack{C_3\leftarrow C_3-\lambda_1C_2\\ \vdots\\ C_j\leftarrow C_j-\lambda_1^{j-2}C_2}}\ (1,\ \lambda_i,\ \lambda_i^2,\ \lambda_i^3+\lambda_i^2\lambda_1,\ \dots)$$

$\vdots$

$$\longrightarrow (1, \lambda_i, \lambda_i^2, \dots, \lambda_i^{n-2})$$

בסוף קיים

$$= \prod_{n \geq i > 1} (\lambda_i - \lambda_1) \begin{vmatrix} 1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \dots & \lambda_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

סה"כ:

$$V(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \prod_{n \geq i > 1} (\lambda_i - \lambda_1) V(\lambda_2, \dots, \lambda_n)$$
$$= \prod_{n \geq i > 1} (\lambda_i - \lambda_1) \prod_{n \geq i > 2} (\lambda_i - \lambda_2) V(\lambda_3, \dots \lambda_n)$$
$$= "\dots" = \underbrace{\prod_{n \geq i > j \geq 1} (\lambda_i - \lambda_j) V(\lambda_n)}_{\text{טלסקופיה}}^{1}$$

הערה: ההגדרה ל- $n=1$ היא $V(\lambda_1) = \prod_{1 \geq i > j \geq 1} (\lambda_i - \lambda_j) = 1$

דוגמא:

$$V(2,1,3) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix} = (3-1)(3-2)(1-2) = 2 \cdot 1 (-1) = -2$$

$(\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 3)$

מסקנה: $V(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq 0$ עבור $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ שונים.

שימוש: עבור $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ שונים, $t_1, \dots, t_n$ מספרים מתקיימת הטענה:

טענה: קיים פולינום יחיד p מדרגה $n-1$ רק ש- $p(\lambda_i) = t_i$.

הוכחה: נבחר: $p = a_0 + a_1 x + \dots + a_{n-1} x^{n-1}$

$$p(\lambda_i) = t_i \iff \begin{cases} a_0 + a_1 \lambda_1 + a_2 \lambda_1^2 + \dots + a_{n-1} \lambda_1^{n-1} = t_1 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_0 + a_1 \lambda_n + a_2 \lambda_n^2 + \dots + a_{n-1} \lambda_n^{n-1} = t_n \end{cases} \Rightarrow$$

וזו המטריצה:

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \lambda_1 & \dots & \lambda_1^{n-1} & t_1 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \dots & \lambda_n^{n-1} & t_n \end{array} \right)$$

אנו יודעים ש- $\det A \neq 0 \Leftarrow A$ הפיכה $\Leftarrow$ קיים פתרון יחיד. ■

בפרט: אם נקח $t_1 \dots t_n = 0$ אז נקבל שקיים פולינום יחיד שמתאפס ב- $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (מדרגה $\leq n-1$). הפולינום $p=0$ מתאפס ב- $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

מסקנה: אם $\deg p \leq n-1$ ו- p מתאפס ב- n נק' אז $p=0$.

3.3.08

אלגברה ליניארית - תרגול

תמורות

$X_n = \{1, \dots, n\}$

הגדרה:
תמורה על n אותיות זה פונקציה $\sigma : X_n \to X_n$ שהיא חח"ע ועל.

סימון: קבוצת התמורות על $X_n = \Sigma_n$.

רישום:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

דוגמא: $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

סימון: $\sigma = (i_1 \dots i_k)$ זה k-מחזור (k-cycle).

$\sigma(i_1) = i_2 \quad \sigma(i_2) = i_3 \quad \dots, \quad \sigma(i_{k-1}) = i_k$

$\sigma(i_k) = i_1$

לכל $j \notin \{i_1, \dots, i_k\}$ $\quad \sigma(j) = j$.

דוגמא:

$$(1\ 2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 2 & 1 & 3 & \dots & n \end{pmatrix}$$