26.2.08 (1)

אלגברה לינארית - תרגול

טענה: $A_{n\times n}$ משולשית אז $\det A=\prod_{i=1}^{n} a_{ii}$

$a_{ij}=0$ אם $i>j$ (משולשית עליונה, $i<j$ אם תחתונה)

__לדוגמא__

$$\begin{vmatrix}1&1&1\\0&2&1\\0&0&3\end{vmatrix}=6$$

תרגיל:

$$\begin{vmatrix}0&&1\\&\iddots&\\1&&0\end{vmatrix}_{n\times n}=?$$

פתרון: אם n זוגי:

$$\left.\begin{matrix}R_1\leftrightarrow R_n\\R_2\leftrightarrow R_{n-1}\\\vdots\\R_{\frac{n}{2}}\leftrightarrow R_{\frac{n}{2}+1}\end{matrix}\right\}\text{ סה"כ } \frac{n}{2} \text{ החלפות} \Rightarrow |\iddots|=(-1)^{\frac{n}{2}}$$

n אי זוגי:

$$\left.\begin{matrix}R_1\leftrightarrow R_n\\\vdots\\R_{\frac{n-1}{2}}\leftrightarrow R_{\frac{n-1}{2}+2}\end{matrix}\right\}\ \frac{n-1}{2} \text{ החלפות} \Rightarrow |\iddots|=(-1)^{\frac{n-1}{2}}$$

אפשר לפתור גם בדרך נוספת כדי להימנע מחלוקה למקרים.
נעביר כל שורה למקומה דרך כל שאר השורות ונקבל:

עבור שורה ראשונה $\Rightarrow$ $n-1$ החלפות

$$\begin{pmatrix}1&\cdots&0&0\\&&1&\\&\iddots&&\\0&\cdots&&1\end{pmatrix}\Leftarrow\begin{pmatrix}0&&1\\&\iddots&\\1&&0\end{pmatrix}$$

עבור השורה השניה נבצע $n-2$ החלפות וכך הלאה עד השורה אחרי לפני אחרונה בה נבצע החלפה 1. נקבל את הסדרה החשבונית:

$$\underbrace{(n-1)+(n-2)+\dots+1}_{\text{סכום סדרה חשבונית}}\Rightarrow |\iddots|=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}=\begin{cases}1 & n=0,1\ (\mathrm{mod}\ 4)\\-1 & n=2,3\ (\mathrm{mod}\ 4)\end{cases}$$

תרגיל:

$$\begin{vmatrix}1&&n\\&2&\\&\ddots&\\n&&n\end{vmatrix}\underset{\substack{C_i\leftarrow C_i-C_n\\ i=1,\dots,n-1}}{=}\begin{vmatrix}1-n&&0&n\\&2-n&&n\\&&\ddots&n\\0&&-1&n\end{vmatrix}=(1-n)(2-n)\cdots(-1)\cdot n=(-1)^{n-1}\cdot n(n-1)(n-2)\cdots2\cdot1=(-1)^{n-1}\cdot n!$$

תרגיל: $A_{n\times n}$ הוכיחו כי אם ב-A יש מלבן $k\times l$ של אפסים
וגם $k+l\geq n+1$ אז $\det A=0$.

אם $k=n$ או $l=n$ אז ב-A יש שורת או עמודת אפסים ולכן $\det A=0$
נבדוק מקרים אחרים:

אלגברה לינארית - תרגול

26.02.08

(1)

טענה: $A_{n\times n}$ משולשית אז $\det A = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$

$a_{ij}=0$ אם $i>j$

דוגמה: $\det\begin{pmatrix}1&1&1\\0&2&1\\0&0&3\end{pmatrix} = 6$

תרגיל:

$$\begin{vmatrix} 0 & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & 0 \end{vmatrix}_{n\times n} = ?$$

פתרון: אם n זוגי:

$$\left.\begin{array}{l} R_1 \leftrightarrow R_n \\ R_2 \leftrightarrow R_{n-1} \\ \vdots \\ R_{\frac{n}{2}} \leftrightarrow R_{\frac{n}{2}+1} \end{array}\right\} \text{סה״כ } \tfrac{n}{2} \text{ החלפות} \quad \Rightarrow |\circ| = (-1)^{\frac{n}{2}}$$

אם n אי-זוגי:

$$\left.\begin{array}{l} R_1 \leftrightarrow R_n \\ R_{\frac{n-1}{2}} \leftrightarrow R_{\frac{n-1}{2}+2} \end{array}\right\} \text{סה״כ } \tfrac{n-1}{2} \text{ החלפות} \quad \Rightarrow |\circ| = (-1)^{\frac{n-1}{2}}$$

אפשר לרשום לכל n:

$$\begin{vmatrix} 0 & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & 0 \end{vmatrix}_{n\times n} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

להזיז שורה ראשונה למקום n — $n-1$ החלפות

$$\begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & 0 \end{pmatrix}$$

שורה שניה — $n-2$ החלפות

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & & 1 \\ & & \iddots & \\ 0 & 1 & & \end{pmatrix}$$

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} = \begin{cases} 1 & n = 0,1 \pmod 4 \\ -1 & n = 2,3 \pmod 4 \end{cases}$$

תרגיל:

$$\begin{vmatrix} 1 & & & \\ & 2 & & n \\ & & 3 & \\ n & & & \ddots \; n \end{vmatrix} \underset{\substack{C_i \leftarrow C_i - C_n \\ i=1,\dots,n-1}}{=} \begin{vmatrix} 1-n & 0 & \cdots & 0 & n \\ 0 & 2-n & & & \vdots \\ \vdots & & 0 & & \\ & & & -1 & n \\ 0 & & & 0 & n \end{vmatrix}$$

$$= (1-n)(2-n)\cdot\ldots\cdot(-1)\cdot n = (-1)^{n-1}\cdot n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1 = (-1)^{n-1}n!$$

מטריצה משולשית ?

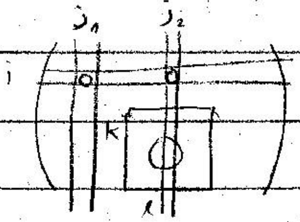
תרגיל: $A_{n\times n}$; הוכיחו כי אם ב-A יש מלבן $k\times l$ שכולו אפסים ו: $k+l \geq n+1$ אז $\det A=0$.

הוכחה: אם $k=n$ או $l=n$ אז ב-A יש שורת או עמודת אפסים ולכן $\det A=0$.

לכן נניח שזה לא המקרה.

אז נניח ששורה i לא נחתכת עם המלבן

נפתח את $\det A$ לפי שורה i:



מההנחה נובע $l>1$ (כי $k<n$)

$k\times(l-1)$

בסה"כ כשמחשבים את A_{ij}

אז מחשבים דטרמיננטה של מטריצה $(n-1)\times(n-1)$

שבה יש מלבן אפסים בגודל $k\times(l-1)$ מתקיים $k+l-1 \geq n = (n-1)+1$

$$\left(\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}(-1)^{i+j}\right)$$

קבלנו: $\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}(-1)^{i+j}$

מקרה $n-1$ $\Rightarrow$ מקרה n

אז באינדוקציה מתקבלת הטענה (המקרה של $n=1$ טריוויאלי: (0))

מקרה 1 $\Rightarrow \ldots \Rightarrow$ מקרה $n-2$ $\Rightarrow$ מקרה $n-1$ $\Rightarrow$ מקרה n

$$A\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ 4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 8 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \det A = -4\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 8 & 0 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 0 & 1 \\ 6 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 1 \ldots$$

כי כל אחד כזה זה 0

עוד על $rk\,A$:

שאלה: $A_{n\times m}$, $Ax=0$ מה"ה הומוגנית, מהו $\dim N(A)$?

תשובה: $\dim N(A) =$ מס' הפרמטרים החופשיים

$\dim N(A) =$ מס' הפרמטרים החופשיים $= m - rkA$

$$N\left(\begin{pmatrix}1&0&1&0&1\\0&1&0&0&1\\0&0&0&1&1\end{pmatrix}\right) = Span\left\{\begin{pmatrix}\\ \\ \end{pmatrix},\begin{pmatrix}\\ \\ \end{pmatrix}\right\}$$

שאלה: מתי ל- $Ax=b$ יש פתרון?

תשובה: כאשר $rk(A|b) = rk(A)$

הסבר: כשמדרגים את $(A|b)$ מקבלים בסוף $(C|b')$ כש-C זה הצורה הקנונית של A. אם ב-$(C|b')$ יש יותר שורות לאפס מב-C אז אין פתרון.

נניח $Ax_0=b$ אז $N(A|b) = x_0 + N(A)$ קב' מהצורה x_0+W
כש-W תת-מרחב, $x_0\in V$, זה מה שנקרא תת-מרחב אפיני.

אז מגדירים: $\dim(x_0+W) = \dim W$

$\dim(A|b) = \dim N(A)$

תרגיל: $A, B_{n\times n}$ הראו כי: $rk\begin{pmatrix}A & B\\ 2A & A-2B\end{pmatrix} \le 2rkA + rkB$

פתרון: "$R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1$" בבלוקים, פירוש $R_{n+i} \leftarrow R_{n+i} - 2R_i$, $i=1,\dots,n$

מקבלים: $rk(\dots) = rk\begin{pmatrix}A & B\\ 0 & A\end{pmatrix}$

שים לב: $rk\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} = rk\,A = rk\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & A\end{pmatrix} = rkB = rk\begin{pmatrix}0 & B\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

במקרה שלנו מקבלים: $rk\begin{pmatrix}A & B\\ 0 & A\end{pmatrix} = rk\left[\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & B\\ 0 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & A\end{pmatrix}\right] \le$
$rkA + rkB + rkA$

תרגיל: נתון:

$$rk\begin{pmatrix}1&2&1&2\\3&4&a&b\\c&d&1&2\\3&4&3&4\end{pmatrix}=2$$

מצאו את a,b,c,d

פתרון: נתון: $\dim R(A)=2$

ובה"כ $\begin{pmatrix}1\\2\\1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\4\\3\\4\end{pmatrix}$ בת"ל, לכן פורשים את $R(A)$

לכן $\begin{pmatrix}3\\4\\a\\b\end{pmatrix},\begin{pmatrix}c\\d\\1\\2\end{pmatrix}\in Span\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\4\\3\\4\end{pmatrix}\right\}$

אז קיימים s,t כך ש:

$$\begin{pmatrix}3\\4\\a\\b\end{pmatrix}=s\begin{pmatrix}1\\2\\1\\2\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}3\\4\\3\\4\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}3=s+3t\\4=2s+4t\\a=s+3t=3\\b=2s+4t=4\end{cases}$$

באותה צורה:

$$\begin{pmatrix}c\\d\\1\\2\end{pmatrix}=s'\begin{pmatrix}1\\2\\1\\2\end{pmatrix}+t'\begin{pmatrix}3\\4\\3\\4\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}c=s'+3t'=1\\d=2s'+4t'=2\\1=s'+3t'\\2=2s'+4t'\end{cases}$$

טענה: $rk\,A=r \iff$ קיים ב-A מינור $r\times r$ שונה מאפס.
כלומר קיימת תת-מטריצה $B_{r\times r}$ של A כך ש: $\det B\neq 0$

הוכחה: $\Leftarrow$: $\det B\neq 0 \Rightarrow rkB=r \Rightarrow rkA\geq rkB=r$

$\Rightarrow$: $rkA\geq r \Leftarrow$ קיימות ב-A r שורות בת"ל
נמחק מ-A את יתר השורות ונשאר עם תת-מטריצה A'
עם r שורות שהן כולן יחד בת"ל לכן $rkA'=r$
לכן ב-A' יש r עמודות בת"ל, נמחק את יתר העמודות
ונשאר עם תת-מטריצה $B_{r\times r}$ של A שמקיימת $rkB=r\Rightarrow \det B\neq 0$

האם קיים a כך ש: $rk\underbrace{\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\a&2&1\end{pmatrix}}_{A}=2$?

פתרון: $rk<3 \Leftarrow$ לא קיים מינור $3\times 3\neq 0 \Leftarrow \det A=0$

$\det A=\begin{vmatrix}1&1\\a&1\end{vmatrix}=1-a\Rightarrow a=1$ פיתוח לפי שורה 2

נשים לב שיש מינור $\begin{vmatrix}1&1\\0&1\end{vmatrix}=1$ לכן $rkA\geq 2$

<u>מסקנה:</u> $\operatorname{rk} A = \max \left\{ r \in \mathbb{N} \;\middle|\; \text{קיים מינור } r\times r \text{ ב-}A \text{ שונה מאפס} \right\}$

$$\left(\begin{array}{l} \operatorname{rk} \geq r \iff \text{קיים מינור } r\times r \neq 0 \\ \operatorname{rk} < r \iff \text{כל מינור } r\times r = 0 \end{array} \right)$$