22.2.08 (1)

אלגברה לינארית - תרגול

מציאת הפכי של מטריצה

משפט: מטריצה $A_{n\times n}$ הפיכה $\Leftrightarrow$ A שקולת שורות ל I_n $\Leftrightarrow$ שורות של A בת"ל $\Leftrightarrow$ עמודות של A בת"ל $\Leftrightarrow$ למע' $Ax=b$ קיים פתרון יחיד.

תרגיל: תהי $A=\begin{pmatrix}1&2&5\\0&1&5\\-1&0&6\end{pmatrix}$ בדקו אם A הפיכה ומצאו את ההפכי אם כן.

פתרון: נדרג מטריצה מורחבת $(A|I_n)$ ונפעיל פעולות שורה עד שנגיע לצורה קנונית. אם בצורה קנונית יש I אז A הפיכה ומה שנשאר בצד השני זה ההפכי.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&5&1&0&0\\0&1&5&0&1&0\\-1&0&6&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{R_3\leftarrow R_3+R_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&5&1&0&0\\0&1&5&0&1&0\\0&2&11&1&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[R_1\leftarrow R_1-2R_2]{R_3\leftarrow R_3-2R_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-5&1&-2&0\\0&1&5&0&1&0\\0&0&1&1&-2&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_2\leftarrow R_2-5R_3]{R_1\leftarrow R_1+5R_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&6&-12&5\\0&1&0&-5&11&-5\\0&0&1&1&-2&1\end{array}\right)$$

$$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \| \quad A^{-1}$$

הגדרה: הדרגה של $A_{m\times n}$ זה $rkA=\dim R(A)$.

דוגמא: נמצא את הדרגה של $A=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\5&6&7&8\\9&14&19&24\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\5&6&7&8\\9&14&19&24\end{pmatrix}\xrightarrow[R_3\leftarrow R_3-9R_1]{R_2\leftarrow R_2-5R_1}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&-4&-8&-12\\0&-4&-8&-12\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3\leftarrow R_3-R_2}\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&-4&-8&-12\\0&0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow rkA=2$$

משפט: $rkA^t=rkA$

$$B=\begin{pmatrix}1&5&9\\2&6&14\\3&7&19\\4&8&24\end{pmatrix}=A^t\Rightarrow rkB=2$$

אם $A_{m\times n}$ אז $rkA\le\min(m,n)$.

הגדרה: תת מטריצה של מטריצה A זה מטריצה שמתקבלת מ-A ע"י מחיקת שורות ועמודות.

דוגמא: $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\2&4&5\end{pmatrix}$ $\quad A'=\begin{pmatrix}1&1&0\\2&4&5\end{pmatrix}$ $\quad A''=\begin{pmatrix}1&0\\2&5\end{pmatrix}$

משפט: אם B תת מטריצה של A אז $rkB\le rkA$.

הוכחה:
מספיק לבדוק את המקרים.

1) B מתקבל ע"י מחיקת שורה.
2) B מתקבל ע"י מחיקת עמודה.

1) $rk B = \dim R(B)$

מהנתון $R(B) \subseteq R(A)$ ו- לכן $\dim R(B) \le \dim R(A)$ (לפי הגדרה) ולכן ה- rk מקיים את המשפט.

2) במקרה זה B מתקבל ע"י מחיקת שורה מ A^t. לכן, עפ"י ①:

$$rk B = rk B^t \le rk A^t = rk A$$

תרגיל: מצאו rkA עבור $A=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&4&1\\2&6&\lambda\end{pmatrix}$ אם נתון ש- A לא הפיכה.

פתרון: נשתמש בעובדה: $A_{n\times n}$ הפיכה $\Leftrightarrow rkA=n$. במקרה שלנו יוצא $rkA<3$. מצד שני $B=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ תת מטריצה של A $\Leftarrow rkA \ge rkB = 2$
$\Leftarrow rkA = 2$,

תרגיל: $A_{n\times m}$, הוכיחו כי $rkA\le 1$ אמ"מ $A = n\left\{\begin{pmatrix}|\\v\\|\end{pmatrix}\right.\cdot\underbrace{(-w-)}_{m}$

לדוגמא: $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1&2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&1&2\\2&2&4\\3&3&6\end{pmatrix}$

פתרון:
$\Leftarrow$ אם $V=0$ אז $A=0$ ולכן $rkA=0$. לכן נניח $V=\begin{pmatrix}v_1\\\vdots\\v_n\end{pmatrix}$.
בה"כ נניח $v_1\neq 0$.

נקבל:

$$\begin{pmatrix}- & - & - & -\\ & & 0 & \end{pmatrix} \xleftarrow[i=2..n]{R_i \leftarrow R_i - \frac{v_i}{v_1}R_1} A = \begin{pmatrix}v_1w_1 & v_1w_2 & \dots & v_1w_m\\ \vdots & & & \\ v_nw_1 & \dots & \dots & v_nw_m\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ נניח $rkA\le 1$. אם $rkA=0$, זה נגמר. אז נניח $rkA=1$ $\Leftarrow$ $\dim R(A)=1$
$\Leftarrow$ לכל $0\neq V\in R(A)$ מתקיים $R(A)=span(V)$. בפרט, $A\neq 0$ (ונניח בה"כ $R(A)\neq 0$)
כיוון שלכל $i=2,\dots,n$: $R_i\in R(A)$ $\Leftarrow$ קיים λ_i כך ש $R_i(A)=\lambda_i R_1(A)$.

$$\Leftarrow \quad A = \begin{pmatrix}R_1(A)\\ -\lambda_2R_1(A)-\\ \vdots\\ -\lambda_nR_1(A)-\end{pmatrix} \Leftarrow A = \begin{pmatrix}1\\\lambda_2\\\vdots\\\lambda_n\end{pmatrix} = (1\ \lambda_2 \dots \lambda_n)$$

22.2.08

③

אלגברה לינארית - תרגול

דוגמא:

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3&\dots&n\\2&4&6&\dots&\\3&6&9&\dots&\\\vdots&&&\ddots&\\n&2n&3n&\dots&nn\end{pmatrix} \Leftarrow A=\begin{pmatrix}1\\\vdots\\\vdots\\n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&\dots&n\end{pmatrix}$$

משפט: לכל A,B: $rk(AB)\le rkA,\ rkB$

הוכחה: בשיעור קודם ראינו כי פעולה אלמ' לא שורה φ מקיים $\varphi(AB)=\varphi(A)\cdot B$
ניקח סדרה של פעולות שורה $\varphi_1,\dots,\varphi_n$ כך ש: $\underset{\text{מטריצה מדורגת}}{\varphi_n\circ\dots\circ\varphi_1(A)=C}$
אז $\varphi_n\circ\dots\circ\varphi_1(AB)=C\cdot B$, $rkCB=rkAB$, $rkC=rkA$ אז
אפשר להניח כי A מדורגת.

בפרט, מספר שורות שונות מאפס $=rkA$, לכן AB כי אם $R_i(A)=0$ אז $R_i(AB)=0$.
מספר השורות ב-AB שווה למס' השורות ב-A. מספר שורות האפסים ב-AB
גדול שווה ממספר השורות ב-A $rkAB\le$ מספר שורות AB פחות מספר שורות אפסים $\le$ השורות ב-A $=rkA$

סה"כ $rkAB\le rkA$.

לגבי rkB: $rkAB=rk(AB)^t=rkB^tA^t\le rkB^t=rkB$

סה"כ $rkAB\le rkB$ ☒

תרגול: יהי $n\ge2$ הוכיחו כי עבור $A=\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}(i+j)\right)\right)_{i,j=1,\dots,n}$ $rkA=2$.

פתרון: $B'=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}\xleftarrow[\text{השורה}]{\text{דירוג}}B'=\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}\Rightarrow rkB'=2\le rkA$

$$(A)_{ij}=\cos\left(\frac{\pi}{2}(i+j)\right)\underset{\text{זהות}}{=}\cos\frac{\pi}{2}i\cdot\cos\frac{\pi}{2}j-\sin\frac{\pi}{2}i\cdot\sin\frac{\pi}{2}j\underset{\text{זהות}}{=}b_{i1}c_{1j}+b_{i2}c_{2j}$$

כלומר עבור:

$b_{i1}=\cos\frac{\pi}{2}i \qquad c_{1j}=\cos\frac{\pi}{2}j$

$b_{i2}=-\sin\frac{\pi}{2}i \qquad c_{2j}=\sin\frac{\pi}{2}j$

אז $B_{n\times2}$, $C_{2\times n}$ ו- $A=BC$ לכן לפי (הנ"ל) $rkA\le rkB\le2\Rightarrow rkA=2$.

מטריצות בלוקים

כל מטריצה אפשר לחלק בצורה

$$A\left(\begin{array}{c|c}A_{11}&A_{12}\ \dots\\\hline A_{21}&\\\hline\vdots&\end{array}\right)$$

וצריך להתקיים שלכל הבלוקים באותה עמודה יש אותו מס' עמודות וכנ"ל גם שורות.

דוגמא:

$$A=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&1\\0&1&2&3\end{pmatrix}=\left(\begin{array}{c|c}0&I_2\\\hline I_2&\begin{matrix}0&1\\2&3\end{matrix}\end{array}\right)$$

22.2.08 (ד)

אלגברה לינארית - תרגול

דוגמאות חשובות

מטריצת בלוקים אלכסונית

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{B_1} & & & 0 \\ & \boxed{B_2} & & \\ & & \boxed{B_3} & \\ 0 & & & \ddots \ \boxed{B_k} \end{pmatrix}$$

משולשת עליונה:

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{B_1} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{B_k} \end{pmatrix}$$

הכפלת מטריצת בלוקים

נניח $A = (A_{ij})_{j=1,\dots,k}^{i=1,\dots,l}$ $\quad B = (B_{ij})_{j=1,\dots,k'}^{i=1,\dots,l'}$

אז אם $k = l'$ וגם $j=1,\dots,k'$ $\quad m=1,\dots,k$ $\quad i=1,\dots,l$ מתקיים שמוגדר הכפל $A_{im}B_{mj}$

אזי AB היא מטריצת בלוקים $l \times k$ של בלוקים $AB_{ij} = \sum_{m=1}^{k} A_{im}B_{mj}$

דוגמא:

$$A = \left(\begin{array}{c|cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad B = \left(\begin{array}{c|cc|cc} 2 & 0 & & 0 & \\ \hline & 1 & 0 & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \\ \hline 0 & 0 & & 1 & 2 \\ & & & 3 & 5 \end{array}\right)$$

$$AB = \left(\begin{array}{c|cc|cc} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & & 1 & 2 \\ & & & 3 & 5 \end{array}\right)$$

$$A = \left(\begin{array}{ccc|cc} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 8 \\ \hline 0 & 1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad B = \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 4 & & & \\ 2 & 5 & & 0 & \\ 3 & 6 & & & \\ \hline & 0 & 1 & 2 & 0 \\ & & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$AB = \left(\begin{array}{c|c} 0(\cdots) + (\cdots)0 & 0\cdot 0 + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} + (\cdots)0 & (\cdots)0 + \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 12 & 8 \\ \hline 8 & 17 & 3 & 11 & 5 \\ 4 & 13 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

<u>תרגיל</u>: נניח $A_{n\times n}$ נילפוטנטית כלומר $A^k = 0$ עבור k כלשהו.
הוכיחו כי $(I_n - A)$ הפיכה ומצאו את $(I_n - A)^{-1}$.

<u>פתרון</u>: בעצם רוצים להשתמש בנוסחה: $\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$. במקרה שלנו $A^n = 0$
לכל אחת. לכן אפשר לרשום "$(I-A)^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} A^i$" אבל כיוון שהחל
מ-k, A^k יהיו 0, נרשום $B = \sum_{i=0}^{k} A^i$.

$$(I-A)B \overset{?}{=} I - A^{k+1} = I$$

$$(I-A)(I + A + A^2 + \dots + A^k) = I + \cancel{A} + \cancel{A^2} + \dots + \cancel{A^k} - \cancel{A} - \cancel{A^2} - \cancel{A^k} - A^{k+1} = I - A^{k+1}$$