19/2/08

(1)

תרגול 11 - אלגברה לינארית

מטריצה משוחלפת - A^t $\qquad (A^t)_{ij} = A_{ji}$

תכונות

1) $(A+B)^t = A^t + B^t$ חיבור $\qquad$ 4) $(A^t)^t = A$

2) $(\lambda A)^t = \lambda \cdot A^t$ כפל בסקלר

3) $(AB)^t = B^t \cdot A^t$

הגדרה: A ריבועית נקראת **סימטרית** אם $A = A^t$ ו**אנטי סימטרית** אם $A = -A^t$.

דוגמא: מטריצה סימטרית

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

מטריצה אנטי-סימטרית

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(האלכסון חייב להיות אפסים)

פעולות אלמנטריות בכפל מטריצות

$$\varphi(A) = \varphi(I_n)\cdot A \qquad \varphi \text{ - פעולה אלמנטרית}$$
$A_{n\times m}$

תרגיל: הוכיחו: $\varphi(AB) = \varphi(A)\cdot B$

פתרון: $\varphi(AB) = \varphi(I_n)(AB) = (\varphi(I_n)A)B = \varphi(A)B$

טענה: $A_{n\times m}$, φ - פ"ע

$A\cdot\varphi(I_m) = A$ שהפעילו על העמודות שלה פ"ע

(להפעיל מימין במטריצה אלמנטרית זה כמו להפעיל פ"ע על עמודות)

הוכחה: $A\cdot\varphi(I_m) = ((A\cdot\varphi(I_m))^t)^t = (\underbrace{\varphi(I_m)^t}_{\varphi^t(I_m)}\cdot A^t)^t =$

מה זה $\varphi(I_m)^t$?

* $\varphi = R_i \leftrightarrow R_j$

$$\varphi(I_m) = \begin{array}{c|c} & \qquad\qquad j \\ \begin{matrix} \\ i \\ j \\ \\ \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & 1 & 0 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

(מטריצה סימטרית)

$\Leftarrow$ $\varphi(I_m)^t = \varphi(I_m)$

$(\varphi^t = \varphi)$

* $\varphi = R_i \leftarrow \lambda R_i$ (גם פה נקבל מטריצה סימטרית)

$$\varphi(I_m) = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \lambda & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

$\Leftarrow$ $\varphi(I_m) = \varphi(I_m)^t$

19/2/08
(2)

$$\varphi = R_i \leftarrow R_i + \lambda R_j \qquad *$$

$$\varphi(I_m) = \begin{array}{c|c} & j \\ i & \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ \lambda & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\varphi(I_m)^t = \begin{array}{c|c} & \\ j & \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \lambda & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\varphi^t = R_j \leftarrow R_j + \lambda R_i \qquad \blacksquare$$

מטריצה הפיכה :

<u>הגדרה</u>: $A_{n\times n}$ (מטריצה ריבועית) נקראת <u>הפיכה</u> אם קיימת $B_{n\times n}$ כך ש-
$AB=BA=I_n$. מסמנים את המטריצה ההפכית ב: A^{-1} , $\frac{1}{A}$.

<u>תכונות</u>

1) כפל של מטריצות הפיכות הוא מטריצה הפיכה
$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$ (A ו- B הפיכות)

2) $(\lambda A)^{-1}=\lambda^{-1}A^{-1}$ $\quad \lambda\neq 0$

3) הפיכות לא סגורה על חיבור, למשל אם A הפיכה אז -A גם הפיכה
אבל $A+(-A)=0$

<u>תרגיל</u>: חשבו $\sum_{k=0}^{n} A^k$ כאשר נתון $(A-I)$ הפיכה ו- $A^0=I$

<u>פתרון</u>: נכפול את הסכום ב $(A-I)$ ונקבל:

$$(A-I)\sum_{k=0}^{n} A^k = (A-I)(A^n+A^{n-1}+\dots+A+I) = A^{n+1}-I$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n} A^k = (A-I)^{-1}(A^{n+1}-I)$$ (כפלנו משמאל ולכן צריך לחלק גם משמאל)

<u>תרגיל</u>: הוכח $A^2=I \Leftarrow$ $A-I$ או $A+I$ לא הפיכה

<u>פתרון</u>: $A^2=I \Rightarrow A^2-I=0 \Rightarrow A^2-I^2=0$ $\quad (I=I^2)$

I מתחלף עם כל מטריצה לכן לפי הנוסחה מהשיעור הקודם

$$\Rightarrow (A-I)(A+I)=0$$

אם אחת מהן לא הפיכה אז סיימנו, אם $A-I$ הפיכה אז

$$(A-I)^{-1}(A-I)(A+I)=(A-I)^{-1}\cdot 0$$

$$\Downarrow$$

$$A+I=0$$ (אם אחת הפיכה אז השניה תהיה אפס אז
אם שתיהן לא הפיכות לא מחייב ששתיהן אפס)

19/2/08

(3)

<u>הגדרה</u>: p פולינום $p = a_m x^m + \dots + a_0$. $A_{n\times n}$

$$\underset{n\times n}{p(A)} = a_m A^m + a_{m-1}A^{m-1} + \dots + a_1 A + a_0 \cdot I_n$$

$$\Big(A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{n \text{ פעמים}} \Big)$$

<u>תרגיל לבית</u>: הוכיחו כי לכל p, q פולינומים מתקיים לכל $A_{n\times n}$
$p(A)q(A) = q(A)p(A)$ (שני פולינומים מאותה מטריצה מתחלפים)

<u>הגדרה</u>: עבור $A_{n\times n}$ אומרים כי A <u>נילפוטנטית</u> (nilpotent) אם קיים k כך ש $A^k = 0$ (רק מטריצות ריבועיות אפשר להעלות בחזקה)

<u>דוגמא</u>: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $A^3 = 0$

לכן A מטריצה נילפוטנטית.

<u>תרגיל</u>: הוכיחו כי אם A נילפוטנטית אז A לא הפיכה.

<u>פתרון</u>: A נילפוטנטית. ניקח k מינימלי כך ש $A^k = 0$, כלומר $A^{k-1} \neq 0$

נניח בשלילה ש A הפיכה, לכן:

$$\Rightarrow A^{k-1} = A^{-1}A^k = A^{-1} \cdot 0 = 0$$

סתירה להנחה! $\big(A^{-1}A^k = (A^{-1}A)A^{k-1} = A^{k-1}\big)$

<u>תרגיל</u>: תהי $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$. חשבו A^n לכל n

הערה: עבור $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_k \end{pmatrix}$ (מטריצה אלכסונית) אז D^n זה קל:

(הוכיחו באינדוקציה על n) $D^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_k^n \end{pmatrix}$.

<u>פתרון</u>: $A^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (I) $A^1 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$

$$A^2 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 2\lambda \\ 0 & \lambda^2 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 2\lambda \\ 0 & \lambda^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^3 & 3\lambda^2 \\ 0 & \lambda^3 \end{pmatrix}$$

נניח $A^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix}$. נוכיח באינדוקציה: נניח נכונות ל-n ונוכיח ל-$n+1$:

$$A^{n+1} = A^n \cdot A \underset{\uparrow \text{ הנחת האינדוקציה}}{=} \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda^{n+1} & (n+1)\lambda^n \\ 0 & \lambda^{n+1} \end{pmatrix} \quad \boxtimes$$

19/2/08

9

מסקנה: עבור p פולינום

$$p(A)=\begin{pmatrix} p(\lambda) & p'(\lambda) \\ 0 & p(\lambda) \end{pmatrix}$$

הוכחה: נסמן $p=a_nx^n+\dots+a_1x+a_0$

$$p(A)=a_nA^n+\dots+a_1A+a_0I_2=a_n\begin{pmatrix}\lambda^n & n\lambda^{n-1}\\ 0 & \lambda^n\end{pmatrix}+\dots+a_1\begin{pmatrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}+a_0\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} a_n\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\dots+a_1\lambda+a_0, & a_n\cdot n\cdot\lambda^{n-1}+a_{n-1}(n-1)\lambda^{n-2}+\dots+a_1 \\ 0 & , a_n\lambda^n+\dots+a_0 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} p(\lambda) & p'(\lambda) \\ 0 & p(\lambda) \end{pmatrix} \quad \boxtimes$$

מטריצות כהעתקות

תהי $A_{2\times 2}$ ו- $v\in R^2$. אפשר לחשוב על v כמטריצה 2×1. נסמן

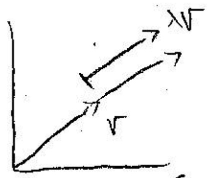
$$T_A(v)=A\cdot v\in R^2 \quad \text{(העתקה)}$$

מקבלים $T_A: R^2\to R^2$ (פונקציה מ- R^2 ל- R^2)

$$v\to Av$$

למשל: * $A=\lambda I$ נסמן $v=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ (וקטור כללי ב R^2)

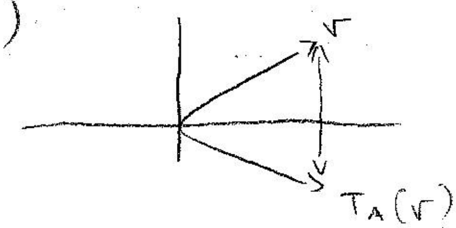
$$T_A(v)=\begin{pmatrix}\lambda&0\\0&\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda x\\ \lambda y\end{pmatrix}=\lambda v$$



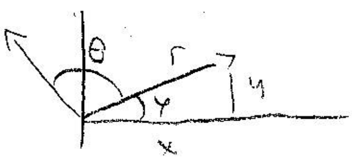
(מותחים את הוקטור)

* $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$

$$T_A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\-y\end{pmatrix}$$



העתקת סיבוב



θ - זווית קבועה

מסובבים את הוקטור

$$T_\theta\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=T_\theta\begin{pmatrix}r\cos\varphi\\ r\sin\varphi\end{pmatrix} \qquad (x=r\cos\varphi,\quad y=r\sin\varphi)$$

$$=\begin{pmatrix}r\cos(\varphi+\theta)\\ r\sin(\varphi+\theta)\end{pmatrix} \longrightarrow$$ הגדרה של ההעתקה, מוסיפים את θ

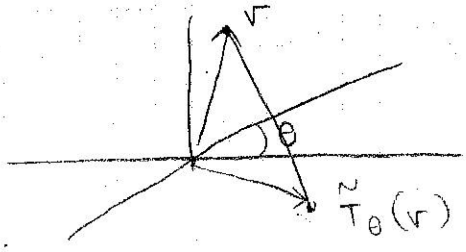
$$=\begin{pmatrix}r\cos\varphi\cos\theta-r\sin\varphi\sin\theta\\ r\sin\varphi\cos\theta+r\cos\varphi\sin\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\cos\theta-y\sin\theta\\ y\cos\theta+x\sin\theta\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}\cos\theta, & -\sin\theta\\ \sin\theta, & \cos\theta\end{pmatrix}}_{\text{נסמן ב } A_\theta}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

אז $T_\theta=T_{A_\theta}$

19/2/08

5

שיקופים



נשים לב:

$$\tilde{T}_\theta = T_\theta \circ \tilde{T}_0 \circ T_{-\theta}$$

(שיקוף דרך האופק) $\tilde{T}_0 = T_J \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$T_\theta = T_{A_\theta} \quad , \quad T_{-\theta} = T_{A_{-\theta}}$$

עובדה:

$$T_A \circ T_B = T_{A\cdot B}$$

$$T_A(T_B(v)) = A\cdot(B\cdot v)$$

$$T_A\circ T_B(v) = T_A(T_B(v)) = A\cdot(B\cdot v) = (AB)\cdot v = T_{AB}(v)$$

מקבלים גם

$$T_A\circ T_B\circ T_C = T_{ABC}$$

לכן =

$$\tilde{T}_\theta = T_{A_\theta}\circ T_J \circ T_{A_{-\theta}} = T_{A_\theta J A_{-\theta}}$$

$$A_\theta\cdot J\cdot A_{-\theta} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2\theta-\sin^2\theta, & \sin\theta\cos\theta+\sin\theta\cos\theta \\ \sin\theta\cos\theta+\sin\theta\cos\theta, & \sin^2\theta-\cos^2\theta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}$$

(מטריצה של השיקוף דרך הישר עם זווית θ)

<u>קשר עם מ"מ</u>: מ"מ $(A_{n\times m}|b)$ אפשר לרשום כתור $Ax=b$

לכן אם A הפיכה אז $A^{-1}Ax=A^{-1}b \Rightarrow x=A^{-1}b$

(x - עמודה של הנעלמים) כלומר יש פתרון יחיד.

<u>מקרה 2x2</u>: ראינו כי תנאי מספיק והכרחי לקיום פתרון יחיד ל

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

זה ש $ad-bc\neq 0$. נסמן $\det(A)$

<u>נוסחא</u> להפכי במקרה 2x2: אם $\det(A)\neq 0$ אז A הפיכה ו-

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

דוגמא: $\lambda\neq 0$ $\quad A=\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{1}{\lambda^2}\begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda} & -\frac{1}{\lambda^2} \\ 0 & \frac{1}{\lambda} \end{pmatrix}$$

19/2/08

6

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \frac{1}{-14}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = 6 - 20 = -14$$

<u>משפט</u>: A, B 2×2

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

<u>הוכחה</u>:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} , & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} , & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

להשלים את ההוכחה בבית.

<u>מסקנות מהמשפט</u>: 1) A ו- B הפיכות $\Longleftrightarrow$ AB הפיכה

$t(A)\det(B) \neq 0 \Leftarrow \det(AB) \neq 0 \Leftarrow$ הפיכה AB

$\Rightarrow \det A, \det B \neq 0 \Longrightarrow A, B$ הפיכות

2) $$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

$$\det(A) \cdot \det(A^{-1}) = \det(AA^{-1}) = \det(I) = 1$$

4. בסדרה a_n מונוטונית יש התכנסות (הפוך
לשנייה המדד), נתון a_n ..., L
נתון שאחת מתתי הסדרות מתכנסת לגבול סופי שנסמן ב-
$a_{n_k} \to L$.
לפי ההגדרה אם סדרה מתכנסת (גם במובן הרחב)
אז כל תת סדרה שלה מתכנסת לאותו הגבול
לכן אפשר להסיק

$$\ell = \lim a_{n_k} = L$$

כלומר הגבול של a_n (L) שווה ל-ℓ, (ℓ הוא
גבול סופי)

5. א. $a_n = \cos^n \frac{n\pi}{4}$

$$a_n = \begin{cases} 1 & a_{4n} \quad (a_4, a_8, a_{12}, \ldots) \\ \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n & a^* \quad (a_1, a_7, a_9, a_{15}, a_{17} \ldots) \\ -\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n & a^{**} \quad (a_3, a_5, a_{11}, a_{13} \ldots) \\ 0 & a_{2+4n} \quad (a_2, a_6, a_{10}, a_{14} \ldots) \end{cases}$$

$\lim a_{4n} \longrightarrow 1$

$\lim a_{2+4n} \longrightarrow 0$

$\lim a^* = \lim a^{**} \longrightarrow 0$

כמעט כל איברי הסדרה נמצאים בסביבת הגבולות החלקיים
הנ"ל ולכן אלו גם הגבולות החלקיים היחידים, מתקיים:

$\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \quad , \inf a_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)^3$

$\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = 1 \quad ; \sup a_n = 1$

$PL(\{0,1\})$