ת.לינארית
18.2.08

אלגברה לינארית (תרגול)

מטריצות:

$M_{n\times m}$ אוסף כל המטריצות מעל $\mathbb{R}$ מסדר $n\times m$. $\mathbb{R}$

מטריצה $A_{n\times m}$ מוגדרת ע"י האיברים שלה

$$A=(a_{ij})\; i=1,\dots,n \;,\; j=1,\dots,m$$

$$A=(\cos(\pi i+j))_{n\times m}$$

$(A)_{ij}$ איבר במקום ij ב-A

$$A=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\end{pmatrix}$$

פעולות:

$A,B\in M_{n\times m}(\mathbb{R})$

- חיבור $(A+B)_{ij}=(A)_{ij}+(B)_{ij}$
- כפל בסקלר, $\lambda\in\mathbb{R}$ $(\lambda A)_{ij}=\lambda(A)_{ij}$

דוגמה: $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$

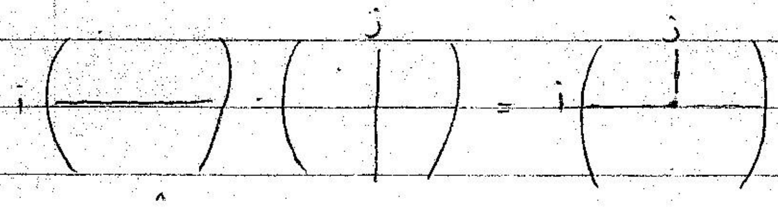
$$\underset{+(-1\cdot B)}{2\cdot A-B}=2\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1&-1&-1\\0&0&-1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2&0&0\\4&-2&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1&-1&-1\\0&0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\4&-2&1\end{pmatrix}$$

כפל מטריצות:

עבור: $A_{n\times p}$ $B_{p\times m}$

$$(AB)_{n\times m}\qquad (AB)_{ij}=\sum_{k=1}^{p}(A)_{ik}(B)_{kj}$$



19.2.08

(2)

אלגברה לינארית (תרגול)

$$v = (v_1, \dots, v_n)$$

$$w = (w_1, \dots, w_n)$$

$$\langle v, w \rangle = \sum_{k=1}^{n} v_k w_k \in \mathbb{R}$$

$$(AB)_{ij} = \langle R_i(A), C_j(B) \rangle$$

דוגמה:

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{matrix}$$

$$\underset{A}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}_{2\times 3}} \underset{B}{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}_{3\times 2}} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$$

עמודה ראשונה AB

$$1\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

עמודה שניה

$$1\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\7\end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} | & & | \\ A\,C_1(B) & \cdots & A\,C_m(B) \\ | & & | \end{pmatrix}$$

$$A\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \qquad A\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\7\end{pmatrix}$$

תכונות של כפל מטריצות:

1. אסוציאטיביות. $(AB)C = A(BC)$
2. אין קומוטטיביות.

באופן כללי $AB \neq BA$

* יכול להיות ש: AB מוגדר ו- BA לא.

$$A_{2\times 3} \quad B_{3\times 4}$$

* יכול להיות BA, AB מוגדרים אבל מסדרים שונים

$$BA_{3\times 3} \quad AB_{2\times 2} \qquad A_{2\times 3} \quad B_{3\times 2}$$

* גם אם BA, AB מוגדרים ומאותו סדר, בד"כ $AB \neq BA$

18.2.08 אלגברה לינארית (תרגול)

③

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\neq$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$$

3) דיסטריבוטיביות מימין ומשמאל:

$$A(B+C) = AB + AC$$

$$(B+C)A = BA + CA$$

4) $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A\cdot(\lambda B)$

5) $A_{n\times m}$ $\quad \underbrace{I_n A} = A = \underbrace{A I_m}$

בפרט אם A ריבועית: $A_{n\times n}$ $\quad I_n A = A I_n = A$

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}_{n\times n} \qquad \lambda B = \lambda(IB) = (\lambda I)\cdot B$$

$$\lambda I = \begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix}$$

הגדרה:

מטריצות ריבועיות A,B נקראות מתחלפות אם $AB = BA$

תרגיל: מצא את B המטריצות שמתחלפות עם $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

פתרון: נחפש $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

דרוש: $AB = BA$

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a-c, & 2b-d \\ 3a+c, & 3b+d \end{pmatrix}$$

$$\|$$

$$BA = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+3b, & b-a \\ 2c+3d, & d-c \end{pmatrix}$$

18.2.08 אלגברה לינארית - תרגול

(4)
$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 2a-c = 2a+3b \\ 2b-d = b-a \\ 3a+c = 2c+3d \\ 3b+d = d-c \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 3b-c=0 \\ a+b-d=0 \\ 3a-c-3d=0 \\ 3b+c=0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & -1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ & & 0 & \end{pmatrix} \\ \qquad\quad\ \ \uparrow \ \ \ \uparrow \\ \qquad\quad\ \ s \ \ \ t \end{array} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{s}{3}+t \\ -\frac{s}{3} \\ s \\ t \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} \frac{s}{3}+t, & -\frac{s}{3} \\ s, & t \end{pmatrix}$$

תרגיל: עבור A,B $n\times n$ הוכיחו כי

$$(A-B)(A+B) = A^2 - B^2 \quad \Longleftrightarrow \quad AB = BA$$

פתרון:

$$(A-B)(A+B) = A^2 + AB - BA - B^2 = A^2 - B^2$$

$$\Longleftrightarrow \quad AB - BA = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad AB = BA \qquad \boxtimes$$

תרגיל לבית: $\left((A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} A^{n-k} \cdot B^k \binom{n}{k} \quad : n \text{ לכל} \quad \Longleftrightarrow \quad AB = BA \right)$

תרגיל: A,B מתחלפות, אז A, B^n גם מתחלפות.

פתרון: באינדוקציה: $n=1$ $AB = BA$ - נתון.

נניח ל-n ונוכיח ל-$n+1$

$$A \cdot B^{n+1} = A(B^n \cdot B) = (AB^n)B \underset{\text{אינדוקציה}}{=} B^n(A \cdot B)$$

$$\underset{\text{נתון}}{=} B^n(B \cdot A) = (B^n \cdot B)A = B^{n+1}A \qquad \boxtimes$$

אלגברה לינארית - תרגול

19.2.08

5

שחלוף: (transpose)

$A_{n\times m} = (a_{ij})$

$A^t_{m\times n}$

$(A^t)_{ij} = (A)_{ji}$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad A^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$