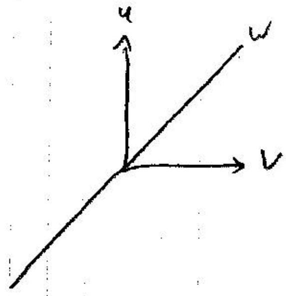
שאלה 6 מתרגיל 4



(א) לא נכון, לדוגמא:

ה $Span(u,v)$ יכיל גם את W שהוא למעשה U במקרה הזה.

(ב) לא נכון, לדוגמה:

T - בסיס סטנדרטי

$$k - \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$

(ג) מקרה ראשון $K \cap T = \emptyset$ מתקבל כי $span(K\cap T) = 0$
ולכן הוא מוכל גם ב $span(T) \cup span(k)$

$K \cap T \neq \emptyset$

$$k = \{k_1, \dots k_n\} \qquad k \cap T = \{v_1, \dots v_d\}$$

$$T = \{t_1, \dots t_m\}$$

$$V \in span(K \cap T)$$

$$V = \sum \lambda_i V_i = \sum \lambda_i k_i \in span\, k$$
$$= \sum \lambda_i t_i \in span\, T \quad \Rightarrow \quad V \in span\, k \cap span\, T$$

<u>משפט:</u> יהי V מ"ו, $V_1, \dots V_n \in V$ אזי $span\{v_1, \dots v_n\}$ הינו ת"מ מינימלי שמכיל את $v_1 \dots v_n$.

<u>הוכחה:</u>

<u>תת מרחב:</u>

(1) $span\{V_1, \dots V_n\} \ni 0 = \sum 0 \cdot V_i$

(2) סגירות לחיבור $\sum \lambda_i V_i + \sum \alpha_i V_i = \sum (\lambda_i + \alpha_i) V_i$

(3) סגירות לכפל $\lambda (\sum \lambda_i v_i) = \sum (\lambda \lambda_i) v_i \in span\{\}$

<u>מינימלי:</u>

ניקח ת"מ $V \supseteq W$ $\quad v_1, \dots v_n \in W$

צ"ל $span\{v_1, \dots v_n\} \subseteq W$

$$\Leftarrow \quad V_1, \dots V_n \in W$$

$$\forall \lambda_i: \ \lambda_1 V_1 \in W, \dots, \lambda_n V_n \in W$$
כי W סגור לכפל

$$\Rightarrow \sum \lambda_i v_i \in W \leftarrow \text{W סגור לחיבור} \quad \Rightarrow \quad span\{v_1, \dots v_n\} \subseteq W$$

⊠

<u>תרגיל:</u> מצאו בסיס ומימד ל- $W=\{A\in M_{2\times 2}(\mathbb{R})\mid trA=0\}$

כאשר $tr\,A=\sum a_{ii}$ ← לדוגמא: $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$, $\underset{(trace)}{trA}=d+a$

מכאן ש:

$$W=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\ \middle|\ a+d=0\right\}\Rightarrow\begin{cases}a=-s\\b=t\\c=v\\d=s\end{cases}$$

$$\Rightarrow W=\left\{\begin{pmatrix}-s&t\\v&s\end{pmatrix}\ \middle|\ v,s,t\in\mathbb{R}\right\}=span\ \underbrace{\left\{\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\right\}}_{\text{בת"ל}}$$

$\Downarrow$

$\dim V=3$.

<u>טענה</u>

1) כל קב' בת"ל ניתן להרחיב לבסיס
2) כל קב' פורשת ניתן לצמצם לבסיס

<u>לכן:</u> אם $\dim V=n$ אז קבוצה בת"ל היא בגודל לכל היותר n.
וכמו כן קב' פורשת היא בגודל לפחות n.

ומכאן, אם $W\subseteq V$ תמ"ו ו-B בסיס ל-W, $\Leftarrow$ B בת"ל ב-V
ואפשר להרחיב את B לבסיס של V.

מכאן, $\dim W\le\dim V$.

<u>טענה:</u> $W\subseteq V$ תמ"ו $\dim W=\dim V$ $\Leftarrow$ $W=V$

<u>הוכחה:</u> נבחר בסיס B ל-W, $|B|=n$. B בת"ל גם ב-V אבל $|B|=\dim V$
$\Leftarrow$ B פורשת את V $\Leftarrow$ $V=span\,B=W$ ☒.

<u>תרגיל:</u>

$V=\mathbb{R}_3[x]$ (P_3) $\qquad W=\{p\mid p(1)=0\}$

$S=\{2x^3-3x+1\}$ נשים לב $S\subseteq W$.

להרחיב את S לבסיס של W ולבסיס של V.

<u>נשתמש בטענה הבאה:</u> $S\subseteq V$ בת"ל ו- $v\notin span\,S$ אז $S\cup\{v\}$ בת"ל.

<u>הוכחה</u> $S=\{v_1,\dots,v_n\}$ $\quad\alpha_1v_1+\dots+\alpha_nv_n+\lambda v=0\Rightarrow -\lambda v=\alpha_1v_1+\dots+\alpha_nv_n\in span(S)$

$\Leftarrow$ $(\lambda\neq 0)$ $v=\frac{\alpha_1}{\lambda}v_1+\dots+\frac{\alpha_n}{\lambda}v_n$ $\Leftarrow$ $v\in span(S)$ <u>סתירה!</u>

לכן $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n + 0 \cdot v = 0 \Leftarrow \alpha_i = 0$

נחזור לתרגיל...

$W \supseteq \underbrace{\{x^2-1,\ x-1\}}_{\text{בת"ל}}$ (אם S לא נמצא בספאן של זה, זה מקיים את התנאי של W וגם זה בת"ל)

$S \notin \mathrm{span}\{x^2-1, x-1\} \Leftarrow B = \{2x^3-3x+1,\ x^2-1,\ x-1\}$ בת"ל

$\dim W \geq 3$ וגם $V \neq W$ לכן $\dim W < \dim V = 4 \Leftarrow \dim W = 3$

כדי להרחיב את B לבסיס צריך להוסיף לו פולינום שלא ב- W
למשל 1, x^3, $x+1$

$\boxtimes$.