11.2.08 ①

אלגברה לינארית 1 - (תרגול)

<u>בסיסים</u>

<u>הגדרה:</u> V - מ"ו
סדרה S נקראת בסיס אם S <u>פורשת</u> וגם <u>בת"ל</u>. $\dim V = |S| \in \mathbb{N}$

$\mathbb{R}^n$: $\{e_1,\dots,e_n\}$ - בסיס סטנדרטי

$$e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \dim \mathbb{R}^n = n$$

$$Mat_{2x2}(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$ בסיס סטנדרטי למרחב המטריצה.

$Mat_{m\times n}(\mathbb{R})$ $$E_{ij} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & \vdots & 0 \\ \cdots & 1 & \cdots \\ 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix} i \\ j \end{array}$$ הבסיס הסטנדרטי $\{E_{ij}\}_{ij=1}^{m,n}$

$\dim = m\cdot n$

$P_n = \{\overset{a_0\cdot 1}{a_0} + a_1x + \dots + a_nx^n\}$ פולינומים ממעלה n לכל היותר.

$$P_n = Span\underbrace{\{1, x, x^2, \dots, x^n\}}_{\text{פורשת } B}$$

נוכיח B-ש בת"ל:
$$a_0\cdot 1 + \dots + a_nx^n = \theta = 0\cdot 1 + \dots + 0\cdot x^n$$

$\Rightarrow \underset{\text{פתרון יחיד}}{a_0 = a_1 = \dots = a_n = 0} \Rightarrow \underline{B \text{ בת"ל}} \Rightarrow B \text{ בסיס (סטנדרטי)}$
(כיון שהשוואה בין פולינומים היא כשהמקדמים שווים)

$\mathbb{R}[x]$* - פולינומים ללא הגבלת מעלה מקסימלית
$$\mathbb{R}[x] = \left\{a_0 + \dots + a_kX^k \;\middle|\; \begin{smallmatrix} k\in\mathbb{N} \\ a_0,\dots,a_n \in \mathbb{R} \end{smallmatrix} \right\}$$

-אין בסיס סופי (לא נוצר סופית - אין סדרה פורשת שהיא סופית).

<u>הוכחה:</u> נניח בשלילה שקיימת סדרה <u>סופית</u> S שהיא פורשת. $S = \{P_1,\dots,P_n\}$
כך ש $\mathbb{R}[x] = Span S = \{a_1P_1 + \dots + a_nP_n\}$

$$\deg(a_1P_1 + \dots + a_nP_n) \le \max_{1\le i\le n}\{\deg(P_i)\} \le \underset{\text{חסם עליון}}{\underline{N}}$$
(קיים כי מדובר בסדרה סופית)

ולכן, אם ניקח $X^{N+1} \in Span\{\dots\}$ כיון ש- $\deg(X^{N+1}) = N+1$ ולכן סתירה.

לכן לא קיימת סדרה פורשת סופית ובפרט, לא קיים בסיס סופי.

11.2.08 ②

אלגברה לינארית 1 - תרגול

<u>מוטיבציה:</u>

<u>דוגמא:</u>
$$V=\{\underbrace{f\in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}}_{\text{פונ'}} \mid \begin{matrix}\cancel{\text{f גזירה (1)}}\\ f'''=0 \ (2)\\ f(1)=0 \ (3)\end{matrix}\}$$
$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

בסיס של V:
$$\left\{\begin{matrix} f_1(x)=x-1\\ f_2(x)=x^2-1\end{matrix}\right\}$$

אז
$$V=\{af_1+bf_2 \mid a,b\in\mathbb{R}\}$$

<u>תרגיל:</u> $V=Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$

$$B=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\right\}$$

נראה כי B בסיס.

<u>הוכחה:</u>

<u>B בת"ל:</u>

$$\alpha\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}+\delta\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

נראה כי הפתרון היחיד הוא טריוויאלי

$$\begin{pmatrix}\alpha&\beta-\delta\\ \beta+\delta&\gamma\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}\alpha=0\\ \beta-\delta=0\\ \beta+\delta=0\\ \gamma=0\end{cases}\Rightarrow \alpha=\beta=\delta=\gamma=0 \Rightarrow \text{B בת"ל}$$

B פורשת:

ניקח מטריצה כללית $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in Mat_{2\times2}(\mathbb{R})$ ונראה כי $A\in SpanB$.

$$\alpha\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}+\delta\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$$

נראה שקיימים $\alpha,\dots,\delta$ שפותרים משוואה זו

$$\begin{pmatrix}\alpha&\beta-\delta\\ \delta&\gamma\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}\alpha=a\\ \beta-\delta=b\\ \beta+\delta=c\\ \underbrace{\gamma}_{\text{משתנים}}=\underbrace{d}_{\text{קבועים}}\end{cases}\Rightarrow \begin{array}{c}\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&0&a\\0&1&0&-1&b\\0&1&0&1&c\\0&0&1&0&d\end{array}\right)\\ \alpha\ \beta\ \gamma\ \delta\end{array} \xrightarrow{R_3\leftarrow R_3-R_2} \left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&0&a\\0&1&0&-1&b\\0&0&0&2&c-d\\0&0&1&0&d\end{array}\right) \xrightarrow{R_3\leftrightarrow R_4} \underbrace{\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&0&a\\0&1&0&-1&b\\0&0&1&0&d\\0&0&0&2&c-b\end{array}\right)}_{\text{מערכת משולשת ללא אפסים באלכסון}}$$

<= קיים פתרון (פתרון יחיד) <= B פורשת.

אלגברה לינארית 1 - (תרגול)

<u>תזכורת</u>

<u>משפט</u>: יהי V מ"ו נוצר סופית.

$\dim V = n$ ו- B סדרה.

(1) אם $|B| \neq n$, B לא יכולה להיות בסיס.

(2) אם $|B| = n$, ו- B בת"ל אזי הוא בסיס

(3) אם $|B| = n$ ו- B פורשת אז היא בסיס $\Leftarrow$ גם בת"ל.