5.2.08 ①

אלגברה לינארית - תרגול

דוגמאות של מ"ו:

$\mathbb{C}$ - מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$.

חיבור - חיבור ב- $\mathbb{C}$.
כפל בסקלר ממשי - כפל ב- $\mathbb{C}$

$$\lambda\in\mathbb{R},\ z\in\mathbb{C},\ \lambda\cdot z\in\mathbb{C}$$

תרגיל:
יהי V מ"ו $U,W\le V$ תת"מ.

להוכיח: (i) $U\cap W$ - תת"מ
(ii) $U\cup W$ תת"מ $\iff$ $U\subseteq W$ או $W\subseteq U$.

פתרון:
(i) ① $0\in U,\ 0\in W \Rightarrow 0\in U\cap W$

② סגירות לחיבור $u_1,u_2\in U\cap W$

$u_1+u_2\in U,\ u_1+u_2\in W \Rightarrow u_1+u_2\in U\cap W$

③ כפל בסקלר באותה דרך.

(ii) $\Leftarrow$ מתקיים $U\cup W=U$ או $U\cup W=W$ ולכן תת"מ.

$\Rightarrow$ נניח בשלילה ש $U\not\subseteq W$ ו- $W\not\subseteq U$ כלומר $\exists u\in U$ כך ש $u\notin W$ ו $\exists w\in W$ ש $w\notin U$

$\Rightarrow u,w\in U\cup W \Rightarrow u+w\in U\cup W$ (הנחנו שזה תת מרחב) $\Rightarrow u+w\in U$ או $u+w\in W$

נסתכל על המקרה ש- $u+w\in U \Rightarrow u+w-u\in U \Rightarrow w\in U$ וזו סתירה ☒

בדיקה למקרה השני זהה.

צירופים לינאריים

V מ"ו $v_1,\dots,v_n\in V$

צירוף לינארי (צ"ל) של $v_1,\dots,v_n$ זה ביטוי מהצורה $\lambda_1 v_1+\dots+\lambda_n v_n$
$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i v_i$

הגדרה: אומרים ש- $v_1,\dots,v_n$ **פורשים** את V אם כל $v\in V$ הוא שווה לצ"ל של $v_1,\dots,v_n$ כלומר קיימים $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ כך ש $v=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i v_i$

סימון: $\mathrm{span}\{v_1,\dots,v_n\}=V$ (הגדרה: {צ"ל של $v_1,\dots,v_n$}
באופן כללי, קבוצה זו תמיד תת"מ של V
(גם אם הם לא פורשים את V).)

דוגמה:

$\mathbb{R}^2\ni v_1=\binom{0}{1}\quad v_2=\binom{1}{1} \Rightarrow 0\cdot\binom{0}{1}+0\cdot\binom{1}{1}=\binom{0}{0}$

$-1\binom{0}{1}+1\binom{1}{1}=\binom{1}{0}\in\mathrm{span}\{v_1,v_2\}$

5.2.08 (2)

אלגברה לינארית - תרגול

דוגמה נוספת: $V_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ $V_2=\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$

$$\lambda_1V_1+\lambda_2V_2=\begin{pmatrix}\lambda_1+2\lambda_2\\\lambda_1+2\lambda_2\end{pmatrix}$$ ← $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ תמיד שווים ולכן לא כל נפרש(?)

הגדרה: $V_1,\dots,V_n\in V$ בלתי תלויה לינארית אם לכל $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ שלא כולם 0 מתקיים $\sum\lambda_iV_i\neq0$ או באופן שקול $\sum\lambda_iV_i=0\Rightarrow\lambda_i=0\ \forall i$

דוגמה: $V_1=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ $V_2=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

אין וקטור שהוא בת"ל אלא רק סדרה שהיא בת"ל

$$\lambda_1V_1+\lambda_2V_2=0$$

$$\begin{pmatrix}\lambda_2\\\lambda_1+\lambda_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\iff\begin{cases}\lambda_2=0\\\lambda_2+\lambda_1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\lambda_2=0\\\lambda_1=0\end{cases}\Rightarrow V_1,V_2$$ בת"ל.

הגדרה: $V_1,\dots,V_n\in V$ זה בסיס ל-V אם זה סדרה פורשת ובת"ל.

משפט: אם $V_1,\dots,V_n$ הוא בסיס ל-V אז כל $v\in V$ ניתן להצגה יחידה כצירוף לינארי של $V_1,\dots,V_n$

דוגמה: $\mathbb{R}^n\supseteq E=\{e_1,\dots,e_n\}$

$$e_i=\begin{pmatrix}0\\\vdots\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}$$ ← מקום i

וזהו הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^n$.

תרגיל: לבדוק האם $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-3\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\5\\3\end{pmatrix}\right\}$ בת"ל ב-$\mathbb{R}^3$

פתרון: לפי הגדרה:

$$\lambda_1\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}-3\\1\\1\end{pmatrix}+\lambda_3\begin{pmatrix}-1\\5\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\iff\begin{cases}\lambda_1-3\lambda_2-\lambda_3=0\\2\lambda_1+\lambda_2+5\lambda_3=0\\\lambda_1+\lambda_2+3\lambda_3=0\end{cases}\iff\left(\begin{array}{ccc|c}1&-3&-1&0\\2&1&5&0\\1&1&3&0\end{array}\right)$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1&-3&-1\\0&7&7\\0&7&7\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&-3&-1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow$$ יש אינסוף פתרונות, כלומר, יש פתרון לא טריוויאלי $\Rightarrow$ הסדרה לא בת"ל אלא ת"ל

$$2\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+1\begin{pmatrix}-3\\1\\1\end{pmatrix}-1\begin{pmatrix}1\\5\\3\end{pmatrix}=0$$

למשל

<u>דוגמאות:</u>

$\{1, x, \dots, x^n\} \subseteq P_n$ בסיס

<u>נבדוק:</u>

<u>פורשת:</u>

$p \in P_n$

$$p \in \mathrm{Span}\{1, \dots, x^n\} \Leftarrow p = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x_1 + a_0 \cdot 1$$

<u>אי-תלות:</u>

$$a_n = \dots = a_0 = 0 \iff a_n x^n + \dots + a_0 \cdot 1 = 0$$

לפי הגדרת שוויון פולינומים כל המקדמים שווים בשני הצדדים.

<u>תרגיל:</u>

יהי $\mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\5\\3\end{pmatrix}\right\} = W \le \mathbb{R}^3$ מצאו בסיס ל-W.

<u>פתרון:</u>

נרשום את הוקטורים של הסדרה הפורשת כשורות במטריצה

$$A = \begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ -3 & 1 & 1\\ -1 & 5 & 3\end{pmatrix}$$

ונשתמש <u>במשפט:</u> יהי $R(A)$ - מרחב השורות של A $= \mathrm{span}\{\text{שורה 1 של } A, \text{שורה 2 של } A, \dots\}$

אם A ו-B שקולות שורות אז $R(A) = R(B)$

(<u>הערה:</u> $A_{n\times m}$ אז $R(A)$ ת"מ של $\mathbb{R}^m$)

נשים לב:

$$W = R(A) = R\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 7 & 4\\ 0 & 7 & 4\end{pmatrix} = R\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 7 & 4\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} = \mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\7\\4\end{pmatrix}\right\}$$

הסדרה הזו בת"ל כי היא באה ממטריצה מדורגת.

<u>משפט:</u> (הוכח בהרצאה) יהי V מ"ו. אם קיים בסיס סופי ל-V מגודל n אז כל בסיס של V הוא מגודל n. <u>מסמנים:</u> $n = \dim V$ (<u>המימד</u> של V)

<u>דוגמאות:</u> ב-$\mathbb{R}^n$ יש לנו בסיס $E = \{e_1, \dots, e^n\}$ אז $\dim \mathbb{R}^n = n$.

$\dim P_n = n+1$ (בסיס $\{1, x, \dots, x^n\}$)

$\dim W = 2$ (לפי התרגיל הקודם)

$$\{(x, ax)\} = L_a \Rightarrow L_a = \mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\a\end{pmatrix}\right\} \Rightarrow \dim L_a = 1$$

<u>הערה:</u> אם $V_1, \dots, V_n$ בת"ל אז $V_1, \dots, V_n$ הם בסיס ל-$\mathrm{span}\{V_1, \dots, V_n\}$ בפרט $\dim \mathrm{span}\{V_1, \dots, V_n\} = n$

<u>דוגמה:</u> $M_{n\times m}(\mathbb{R})$ $E = \{E_{ij}\}$ כאשר

$$E_{ij} = \begin{pmatrix}0 & & 0\\ & 1 & \\ 0 & & 0\end{pmatrix}$$

הבסיס הסטנדרטי בצורה של סדרה: $E_{11}, E_{12}, \dots, E_{1m}, E_{21}, \dots, E_{n1}, \dots, E_{nm}$

5.2.08 (4)

אלגברה לינארית - תרגול

$\Leftarrow \quad \dim M_{n\times m}(\mathbb{R}) = n\cdot m$

<u>תרגיל:</u> נניח $\{u,v,w\}$ בת"ל.

הוכח $\{u+v+w,\ v-w,\ v+w\}$ בת"ל.

<u>פתרון:</u>

$$\lambda_1(u+v+w)+\lambda_2(v-w)+\lambda_3(v+w)=0$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 u+(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)v+(\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3)w=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\lambda_1=0\\ \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0\\ \lambda_1-\lambda_2+\lambda_3=0\end{cases}$$

(כיוון שהם בת"ל כל המקדמים חייבים להיות שווים ל-0).

$\Downarrow$

יש פתרון יחיד ולכן הסדרה בת"ל.

<u>משפט:</u> V מ"ו $\dim V=n$ אז:

1) כל סדרה בת"ל יש לה <u>לכל היותר</u> n איברים

2) כל סדרה פורשת יש לה <u>לפחות</u> n איברים.

<u>דוגמא:</u> האם $\{1,x\}$ פורשת את P_2? <u>לא</u> כי $\dim P_2=3$

<u>פתרונות של מ"מ הומוגנית</u>

<u>תרגיל:</u> תהי

$$A=\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc} & & s & t & \end{array}\\ \begin{pmatrix}1&0&1&2&0\\0&1&0&-3&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}\end{array}$$

מטריצה של מ"מ הומוגנית. מצאו בסיס למרחב הפתרונות.

<u>פתרון:</u> מרחב הפתרונות הוא:

$$W=\left\{\begin{pmatrix}-s-2t\\3t\\s\\t\\0\end{pmatrix}\ \middle|\ s,t\in\mathbb{R}\right\}=\left\{s\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-2\\3\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}=Span\{(\ )(\ )\}$$

(מצא את הבסיס של הפתרונות)

<u>עובדה:</u> קב' פורשת שמתקבלת בדירוג היא בת"ל, לכן זה בסיס ל-W.

<u>הערה:</u> מסמנים: $N(A)=\{$ קב' הפתרונות של מ"מ הומוגנית של מטריצה A $\}$

$N(A|b)=\{$ קב' פתרונות של מ"מ $A|b\}$

אז אפשר לקבל מספר מ-A: $\dim(N(A))$, נקרא דרגת האפסות של A.

<u>קב' פתרונות של מ"מ הומוגנית</u>

נניח $(A|b)$ מטריצה של מ"מ.

$$\left(\begin{array}{ccc|c}a_{11}&\cdots&a_{1m}&b_1\\ \vdots&&\vdots&\vdots\\ a_{n1}&\cdots&a_{nm}&b_n\end{array}\right)$$

5.2.08 ⑤

אלגברה לינארית - תרגול

נניח כי $x=(x_1,\dots,x_m)$ פתרון של $A|b$, כלומר:

$$\forall i: a_{i1}x_1+\dots+a_{im}x_m=b_i$$

נניח $y=(y_1,\dots,y_m)$ פתרון נוסף $A|b$ (נגדיר $x-y=V=(x_1-y_1,\dots,x_m-y_m)$)

נשים לב: $$\forall i: a_{i1}(x_1-y_1)+\dots+a_{im}(x_m-y_m)=\underbrace{\sum_{j=1}^m a_{ij}x_j}_{b_i}-\underbrace{\sum_{j=1}^m a_{ij}y_j}_{b_i}$$

$$=b_i-b_i=0$$

קיבלנו: V - פתרון של המע' $(A|0)$ כלומר $V\in N(A)$ אז קיבלנו: עבור $x\in N(A|b)$.
אז אם $y\in N(A|b)$ ניתן לכתוב $y=x+V$, $V\in N(A)$

נסמן: $x+N(A)=\{x+V \mid V\in N(A)\}$ אז קיבלנו $N(A|b)\subseteq x+N(A)$ נראה את ההכלה ההפוכה:

ניקח $V\in N(A)$ $x\in N(A|b)$ נראה ש $N(A|b)\ni x+V$

נרשום $X+V=(x_1+V_1,\dots,X_m+V_m) \Leftarrow V=(V_1,\dots,V_m)$

$$\Rightarrow \forall_i \sum_{j=1}^m a_{ij}(x_i+y_i)=\underbrace{\sum_{j=1}^m a_{ij}x_j}_{b_i}+\overbrace{\sum_{j=1}^m a_{ij}V_j}^{0}=b_i$$

קיבלנו $\underbrace{x}_{\text{פתרון פרטי}}+N(A)=N(A|b) \Leftarrow x+N(A)\subseteq N(A|b) \Leftarrow x+v\in N(A|b)$

$$\begin{pmatrix}1&0&1&\big|&1\\0&1&\underset{s}{0}&\big|&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$$