ת. ליניארית

19.02.08

הוכחנו: אם A הפיכה מימין ⇐ A הפיכה.

נשאר להוכיח: אם A הפיכה משמאל $\overset{?}{\Leftarrow}$ A הפיכה.

הוכחה: A הפיכה משמאל ⇐ A^t הפיכה מימין ⇐ A^t הפיכה.
⇐ $A=(A^t)^t$ הפיכה. מ.ש.ל.

נתונה $A_{n\times n}$ האם A הפיכה? אם כן, איך לחשב A^{-1}?

נביא את A לצורת מדרגות קנונית B בעזרת פעולות אלמ' על שורות.

$$\varphi_k(\dots\varphi_2(\varphi_1(A))\dots)=B$$

$$\underbrace{\varphi_k(I)\dots\varphi_2(I)\varphi_1(I)}_{\substack{\text{הפיכה}\\ \| \\ C}}\cdot A=B$$

כל $\varphi_i(I)$ אלמ' ⇐ הפיכה

משום ש- C הפיכה, CA הפיכה ⇔ A הפיכה (הוכחנו בשיעור שעבר)

כלומר: A הפיכה ⇔ B הפיכה

$B_{n\times n}$ בצורת מדרגות קנונית.

מקרה א': $B=I$ ⇐ הפיכה ⇐ A הפיכה

מקרה ב': ל- B יש שורת אפסים. ⇐ לא הפיכה ⇐ A לא הפיכה.

נניח הגענו למקרה א', כלומר, A הפיכה. איך לחשב A^{-1}?

$B=I$, $CA=I$, נכפיל ב- A^{-1} מימין, נקבל $CAA^{-1}=A^{-1}$

$$C=A^{-1}$$

$$A^{-1}=\varphi_k(I)\dots\varphi_2(I)\varphi_1(I)=\varphi_k(\dots\varphi_2(\varphi_1(I))\dots)$$

$[A|I]_{n\times 2n}$ אל $[B|C]$ אותן פעולות דירוג של $\underset{A}{A}$ מופעלות על $\underset{I}{I}$, לבסוף נקבל A^{-1}.

דוגמה:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\1&8&27&0&1&0\\1&4&6&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{R_2\to R_2-R_1}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\0&6&24&-1&1&0\\1&4&6&0&0&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3-R_1}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\0&6&24&-1&1&0\\0&2&3&-1&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[R_3\leftrightarrow R_2]{R_3\to\frac{1}{2}R_3}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\0&1&\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\0&6&24&-1&1&0\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - 6R_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 15 & 2 & 1 & -3 \end{array}\right] \xrightarrow[R_1 \to R_1 - 2R_2]{R_3 \to \frac{1}{15}R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{15} & \frac{1}{15} & -\frac{1}{5} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_2 \to R_2 - \frac{3}{2}R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{10} & -\frac{1}{10} & \frac{4}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{15} & \frac{1}{15} & -\frac{1}{5} \end{array}\right]$$

⇐ A הפיכה

ויש ההופכית אלה:

$$\boxed{A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -\frac{7}{10} & -\frac{1}{10} & \frac{4}{5} \\ \frac{2}{15} & \frac{1}{15} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}}$$

אפיונים נוספים של מטריצות הפיכות:

משפט: תהי $A_{n\times n}$ הטענות הבאות שקולות:

1) A הפיכה
2) לכל $b\in\mathbb{R}^n$ קיים ויחיד פתרון $Ax=b$.
3) קיים $b\in\mathbb{R}^n$ כך ש- $Ax=b$ קיים פתרון והוא יחיד.
4) A שקולת שורות למטריצת יחידה.
5) השורות של A בת"ל ב-$\mathbb{R}^n$.
6) העמודות של A בת"ל ב-$\mathbb{R}^n$.

הגדרה: יהיו A,B מטריצות מאותו סדר $m\times n$.
אומרים ש-A שקולת שורות ל-B אם B מתקבלת מ-A
בעזרת מספר של פעולות אלמנטריות על השורות.
סימון: $A\sim B$.

זה יחס שקילות:

1) $A\sim A$ רפלקסיביות
2) $A\sim B \Rightarrow B\sim A$ סימטריות
3) $A\sim B, B\sim C \Rightarrow A\sim C$ טרנזיטיביות.

הוכחת המשפט:

$1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 4 \Rightarrow 1$, $5 \Leftrightarrow 1$, $6 \Leftrightarrow 1$

$1 \to 2$ כבר הוכחנו

$2 \to 3$ ברור

$3 \to 4$ אם נדרג את A לצורת מדרגות קנונית B, $Ax=b$

נקבל מערכת שקולה $Bx=b'$ - קיים פתרון והוא יחיד.

א) $B=I$

לא ייתכן ב) ל-$B_{n\times n}$ יש שורת אפסים. יש משתנים חופשיים ולכן אם יש פתרון

אזי יש ∞ פתרונות.

$B=I$ כלומר A שקולת שורות ל- $B=I$.

$4 \to 1$

$$A = \varphi_k(\dots\varphi_1(I)\dots) = \underbrace{\varphi_k(I)\dots\varphi_1(I)}_{\text{הפיכה כי } \varphi_1(I) \text{ הפיכה}}$$

$1 \to 6$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

נניח

$$\lambda_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix} + \dots + \lambda_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}\lambda_1 + \dots + a_{1n}\lambda_n = 0 \\ \dots \\ a_{n1}\lambda_1 + \dots + a_{nn}\lambda_n = 0 \end{cases}$$

לפי (2) $\lambda=0$, זה אומר שהעמודות של A בת"ל.

(לפי המשפט תמיד יש פתרון טריוויאלי ולפי (2) הוא יחיד.)

כאשר $A\lambda = 0$, $\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}$

$6 \to 1$ מניחים שאם צ"ל של העמודות של A עם מקדמים $\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}$ מתאפס,

אזי $\lambda=0$. זה אומר שלמערכת $A\lambda=0$

יש רק את הפתרון הטריוויאלי. בפרט טענה (3) מתקיימת

$\Leftarrow$ ולכן A הפיכה.

$5 \Leftrightarrow 1$ A הפיכה $\Leftrightarrow$ A^t הפיכה $\overset{6\Leftrightarrow 1}{\Leftrightarrow}$ עמודות של A^t בת"ל
$\Leftrightarrow$ שורות של A בת"ל. מ.ש.ל

דרכת המטריצות:

Span של תת-קבוצה.

יהי V מ"ו. תהי $K \subset V$ תת-קבוצה, $K \neq \emptyset$.

הגדרה: $Span(K)$ זה אוסף של כל הצירופים הלינאריים של איברים מ-K.

$$Span(K) = \left\{ \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n \;\middle|\; \begin{matrix} v_i \in K \\ \lambda_i \in \mathbb{R} \\ n \in \mathbb{N} \end{matrix} \right\}$$

טענה: 1) $Span\,K$ תת-מרחב לינארי ב-V

2) $K \subset Span\,K$

הוכחה: 2) יהי $v \in K$ $\quad v = 1 \cdot v$

1) $\emptyset \neq K \subset Span\,K \neq \emptyset$

$Span\,K$ סגורה ביחס לכפל בסקלרים: $x \in Span\,K \overset{?}{\Rightarrow} \lambda x \in Span\,K$

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \quad , v_i \in K$$

$$Span\,K \ni \lambda x = \sum_{i=1}^{n} (\lambda \lambda_i) v_i$$

$Span\,K$ סגור ביחס לחיבור. $x, y \in Span\,K \overset{?}{\Rightarrow} x+y \in Span\,K$

$$\begin{cases} x = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n , & v_i \in K \\ y = \mu_1 w_1 + \dots + \mu_m w_m , & w_i \in K \end{cases}$$

$$Span\,K \ni x+y = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n + \mu_1 w_1 + \dots + \mu_m w_m$$

מ.ש.ל

טענה: $\operatorname{Span} k$ זה תת מרחב לינארי מינימלי שמכיל את k.

זה אומר אם תת-מרחב L מכיל את k אז L מכיל את $\operatorname{Span} k$.

הוכחה: נניח $k \subset L$ $\overset{?}{\Rightarrow}$ $\operatorname{Span} k \subset L$

אם $x \in \operatorname{span} k$, $x = \sum_i \lambda_i v_i \in L$ לכן $\operatorname{Span} k \subset L$ מ.ש.ל

$v_i \in k \subset L$

טענה: אם $A \subset B$ אז $\operatorname{Span} A \subset \operatorname{Span} B$.

טענה: יהי $L \subset V$ תת-מרחב לינארי, אז $\operatorname{Span} L = L$

הוכחה: $L \subset \operatorname{Span} L$

הכלה הפוכה: מתכונת המינימליות של Span: $\underset{\text{תת-מרחב}}{L \subset L} \Rightarrow \operatorname{Span} L \subset L$

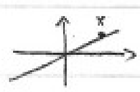
מ.ש.ל

דוגמאות:

1) $\operatorname{Span} V = V$

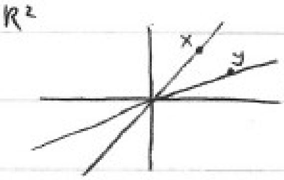
2) $\operatorname{Span}\{0\} = \{0\}$

3) $\{x\} = k \subset \mathbb{R}^2$



$\operatorname{Span}\{x\}$, $x \neq 0$

4) $k = \{x, y\}$, $\operatorname{Span} k = \mathbb{R}^2$



למה: תהי $k \subset V$ תת-קבוצה (סופית). אז $\operatorname{Span} k$ תת-מרחב ממימד סופי, ויתרה מזאת קיימים וקטורים $v_1, \dots, v_k \in K$ שמהווים בסיס של $\operatorname{Span} k$.

הוכחה: נראה ש- $\dim(\operatorname{span} k) \le \underset{N}{|k|}$ N: כמות הוקטורים ב-k, חלק מהם מהווים בסיס של $\operatorname{Span} k$.

$k = \{v_1, \dots, v_N\}$

$v_1, \dots, v_N$ פורשים את $\operatorname{Span} k$.

אם $v_1, \dots, v_N$ תלוים לינארית אז הוכחנו שאחד מהם הוא צ"ל של אחרים.

הוכחנו שאם נוריד את הוקטור הזה מהסדרה,
Span של הוקטורים שנשארו שווה SpanK, ולכן נמשיך לצמצם
עד שנקבל בסיס.

מ.ש.ל

תרגיל: נניח V מרחב סופית, $K \subset V$ תת-קבוצה לאו דווקא סופית.
נוכיח כי קיימים $v_1,\dots,v_k \in K$ שמהווים בסיס של SpanK.

הגדרה: תהי $A_{m\times n}$. הדרגה של A זה מימד של Span של
השורות של A ($span \subset \mathbb{R}^n$)

סימון: $\underset{rank}{rk}(A)$

הערה:
$$\begin{cases} 0 \le rk\,A_{m\times n} \le n \\ rk\,A_{m\times n} \le m \end{cases}$$
$$0 \le rk\,A_{m\times n} \le \min\{m,n\}$$

מתי $rkA=0$? $\quad rkA=0 \iff A=0$

<u>דוגמה:</u> $rk\,0_{m\times n} = 0$